INTRODUÇÃO

1- O problema: sua origem e delimitação

O ensino de matemática no Brasil encontra-se numa situação muito difícil, fato evidenciado pelo alto índice de reprovações nesta disciplina no decorrer das séries do 1º e 2º graus.

Em resposta a esta situação alarmante, muitos professores de matemática têm discutido soluções, elaborando alternativas metodológicas que têm sido inclusive apresentadas nos crescentes encontros regionais e nacionais de professores dessa área.

Dentre as questões metodológicas que têm sido discutidas nesses encontros, uma tem aparecido com grande freqüência: o processo pelo qual a matemática é ensinada nas escolas de 1º e 2º graus, orientado basicamente pelos procedimentos (implícitos ou explícitos) contidos nos livros didáticos que levam os alunos a interpretarem a matemática em grande parte enquanto um aglomerado de conceitos desconexos, injustificados, pré-determinados, eternos, imutáveis, já acabados, etc. A apresentação de um conteúdo novo ocorre de uma forma justaposta a seu precedente, isto é, não há relação entre eles.

Esse problema vem preocupando o autor desta dissertação desde o período de sua graduação. Já naquela época, embora ainda aluno do curso de licenciatura em matemática, já lecionava como professor substituto em escolas da rede estadual. Era motivo de grande inquietação e questionamento, o fato de que o curso de matemática não apresentava subsídios significativos para a análise e superação daquele problema pedagógico. Como fator agravante dessa situação, tal aleatoriedade dos procedimentos de ensino se fazia presente de forma bastante acentuada nas próprias disciplinas do curso de matemática.

No decorrer da prática profissional posterior à conclusão da licenciatura, esse problema foi se tornando um grande desafio na medida em que se apresentava como um dos fatores determinantes da aversão manifestada pelos alunos em relação a matemática (existem outros fatores, comuns aos demais conteúdos escolares, que extrapolam o âmbito da sala de aula e que não serão aqui explicitados).

O problema manifestava-se também através das grandes dificuldades que precisavam ser superadas toda vez que era introduzido um novo tópico de ensino. Os alunos, por verem a matemática de forma fragmentária e estanque, tornavam-se totalmente dependentes do professor mesmo naqueles aspectos que já poderiam ser deduzidos

dos conteúdos anteriormente estudados. Não reconheciam esses aspectos presentes no novo tópico, ficando como que ofuscados pelas características novas que muitas vezes eram até secundárias diante das relações existentes com conceitos já ensinados.

Nas conversas entre o autor deste trabalho com colegas professores de matemática que manifestavam preocupações similares, esse problema aparecia muitas vezes confundido com outro, o da ausência de relação entre o conteúdo matemático escolar e a vivência cotidiana do aluno. A identificação de dois problemas que embora se relacionem, são na verdade distintos, facilmente fazia parecer que a solução para a questão da forma arbitrária através da qual os conceitos se justapõem para o aluno, seja a de estabelecer relações imediatas entre cada tópico matemático e a prática cotidiana extra-escolar.

Ocorre que, na verdade, o conhecimento matemático apresenta uma lógica própria de elaboração. Essa lógica engendra a formação de conceitos de tal forma que esses conceitos chegam a níveis de abstração altíssimos que acarretam uma relação não imediata com os problemas do cotidiano. Porém, a não imediaticidade das relações entre os conceitos matemáticos e o cotidiano não significa que as abstrações matemáticas sejam arbitrárias. Tais abstrações seguem pressupostos teóricos regidos por essa lógica que as explicam e as engendram.

É fácil perceber a conseqüência de se tentar superar a "ilogicidade" da matemática tal como ela é vista pelo aluno, através da mera ligação imediata do conteúdo matemático a questões da prática cotidiana. Substitui-se a interconexão entre os conceitos pela sua relação com os problemas empíricos. Pensa-se que desta maneira a matemática estaria tornando-se mais "concreta", menos "abstrata", menos arbitrária e ilógica. Isso, porém, em nada altera a questão fundamental de que os conceitos matemáticos mantem-se fragmentários e estanques, com a única diferença de agora aparentarem possuir ao menos alguma utilidade. Aliás, o problema não apenas permanece como é, na realidade, agravado pelo fato de julgar-se ter ele já sido superado.

Esse problema da aparência de arbitrariedade dos conceitos é particularmente provocativa no caso do ensino de matemática. Isso porque, como afirma PRADO(1956:197), a matemática tem por objeto essencialmente relações, ou seja, é uma ciência das mais favoráveis ao ensino do pensar por relações. O desafio consiste, portanto, em elaborar sequências de ensino-aprendizagem do conteúdo matemático que criem as condições para que o aluno se aproprie dessa lógica das relações entre os conceitos matemáticos, ou, dizendo de forma mais precisa, apreenda os conceitos matemáticos enquanto relações.

Isso tornaria o aluno capaz de concatenar os conceitos , articulando-os num sistema e até mesmo adquirindo uma certa antevisão dos aspectos relacionais entre um tópico novo e seu precedente. Seu conhecimento tornar-se-ia articulado, consciente.

É importante esclarecer desde já que esse trabalho entende que subjacente a todo problema pedagógico, há de se compreender sua função política.

Sendo assim, a tarefa precípua do processo educativo, isto é, a garantia da apropriação do saber sistematizado, não se constitui aqui, numa atividade politicamente neutra no sentido de sua inserção enquanto um momento da prática social mais ampla.

Pelo contrário, seus preceitos lógico-metodológicos implícitos na elaboração e execução de seus procedimentos de ensino estão relacionados (haja disso consciência ou não) a processos sociais que apontam na direção da manutenção ou mudança das estruturas sociais vigentes.

Contribuir para essa mudança requer, dentre outras coisas, o desenvolvimento de um modo de agir e de pensar que capte a realidade social não como algo pronto e acabado, mas sim, em constante transformação.

A compreensão dessa dimensão política faz que se entenda a própria função do estaticismo, da arbitrariedade dos procedimentos de ensino na medida em que, desta forma, permeia-se uma concepção de conhecimento estanque através da qual muito se contribui para que o aluno entenda sua realidade social também como algo imutável.

Percebe-se, portanto, que a concepção de matemática presente na elaboração e execução de seus procedimentos metodológicos, assim como a situação caótica em que se encontra seu ensino, justificam-se por servir de certa forma à situação vigente.

Entretanto, há de se perceber que, apesar do modo de produção da sociedade produzir e determinar o modo de agir e de pensar de cada indivíduo, essa produção/determinação não é absoluta. É possível o desenvolvimento de um agir e pensar que se contraponha aos elementos já existentes (OLIVEIRA, 1987:75).

O comprometimento do educador com a superação das relações sociais vigentes concretiza-se, dentre outras maneiras, mediante a transmissão de uma concepção de conhecimento capaz de refletir a dinamicidade dessas transformações. Isto quer dizer que os procedimentos de ensino devem ser elaborados de modo que possibilitem no momento pedagógico, um exercício de aquisição da lógica presente no dinamismo da realidade. Tal processo, é claro, só pode se realizar respeitando-se as especificidades próprias de cada ramo do conhecer. Na especificidade pedagógica há, portanto, que se dirigir intencionalmente os procedimentos de ensino para o exercício de uma lógica de interpretação do conhecimento e da realidade, buscando com isso, a formação de atitudes cognoscitivas condizentes com a participação consciente nos processos de transformações sociais.

A matemática, como forma particular de conhecimento, passa a ser também orientada por essas considerações. Daí, o fato deste trabalho adotar a conceituação da matemática como sendo a "ciência das relações".

Interpretar a matemática enquanto relações é criar a efetiva condição para o exercício, no educando, de uma lógica dinâmica que forme um modo de agir e de pensar condizente para o entendimento e execução das transformações sociais.

Assim, a concepção de matemática enquanto ciência das relações insere-se numa concepção de conhecimento adequada para objetivação, no plano pedagógico, do comprometimento com a superação das relações sociais vigentes.

Voltando à caracterização do problema dessa dissertação, a arbitrariedade dos procedimentos de ensino que se manifesta em todos os graus do ensino escolar mostrou-se particularmente acentuado, nas experiências vivenciadas pelo autor deste trabalho no ensino de geometria analítica no 1º e 2ºgraus.

O problema apresenta-se aí da seguinte maneira: a relação entre os conceitos algébricos e os conceitos geométricos é reduzida a uma mera associação mecânica entre curva e equação com ênfase na manipulação das equações algébricas. Explicando melhor: o aluno recebe um conjunto de informações que são assimiladas ao nível da operacionalização de determinadas fórmulas. Não é apresentado o processo de elaboração dos conceitos da geometria analítica, a sua lógica de elaboração. Prioriza-se o cálculo algébrico determinando um raciocínio por justaposição entre os pólos envolvidos da relação, isto é, os conceitos algébricos e geométricos. Ao procederem desta forma, esses procedimentos reduzem todo o processo de unificação entre as curvas e as equações a uma associação meramente mecânica entre um e outro.

Ocorre que, na evolução histórica da matemática, os conceitos da geometria analítica engendraram-se a partir da utilização dos conceitos algébricos na análise dos resultados da geometria euclidiana. Desta utilização, álgebra e geometria unificaram-se pela inclusão de seus conceitos fundamentais, o que propiciou uma compreensão maior de suas especificidades. Surgiu, assim, como produto desta relação a reciprocidade entre as curvas geométricas e suas respectivas equações algébricas.

Essa característica essencialmente relacional da geometria analítica decorrente de ser esta, uma síntese entre geometria e álgebra, não se constitui em fio condutor do ensino na grande maioria dos livros didáticos e menos ainda na prática de ensino nas nossas escolas. Os resultados conceituais das relações existentes na geometria analítica, isto é, seus conceitos básicos como, por exemplo, o conceito de coordenadas cartesianas, o conceito de distância entre dois pontos, etc., são apresentados aos alunos como dados apriorísticos, perdendo-se assim, aquilo que seria fundamental para o ensino de geometria analítica, isto é, a caracterização do significado e da função desses conceitos na unificação dos processos algébricos e geométricos.

A vivência desse problema no campo de ensino de geometria analítica possibilitou, em virtude da forma provocativa que ele aí assume, ao mesmo tempo que sua melhor delimitação, a consciência da necessidade de se buscar um referencial teórico que possibilitasse superar o nível das meras constatações e descrições das manifestações fenomênicas e que, no que se refere ao âmbito maior das estruturas sociais, possibilitasse uma instrumentalização lógico-metodológica eficaz para o desenvolvimento de um modo de agir e pensar que contribua para a participação consciente nos processos de transformações sociais.

Num campo da matemática onde se faz presente de forma tão intensa o aspecto relacional do conteúdo e onde duas áreas historicamente separadas e independentes uniram-se numa síntese, o que torna esse campo particularmente propício à transmissão de uma concepção dinâmica e relacional dos conceitos matemáticos, manifesta-se de forma não menos intensa justamente o mencionado problema de apresentar os conceitos de forma estanque.

Paradoxalmente onde mais seria de se esperar um ensino por relações foi onde o autor deste trabalho vivenciou um tipo de ensino que não ultrapassa o nível das justaposições de fórmulas apriorísticas às figuras geométricas. Essas fórmulas que deveriam instrumentalizar a compreensão e análise das figuras e evidenciar suas relações internas, transformam-se em obstáculos a tal compreensão, pois, são apresentadas como um mero conjunto de procedimentos algébricos a serem mecanizados pelo aluno. A análise (geometria analítica) que seria a mediadora entre uma visão inicialmente sincrética da figura e uma visão sintética da mesma ao final do processo de ensino transforma-se num fim em si mesma, isto é, esvaziando-se totalmente de significação. Aliás, o próprio momento da análise é reduzido ao domínio das técnicas algébricas.

Em suma, o problema a ser superado nessa dissertação, enquanto manifestação específica e, ao mesmo tempo, reveladora de um problema metodológico geral do ensino de matemática, é o da aleatoriedade presente nos procedimentos de ensino da geometria analítica que determinam uma priorização dos procedimentos algébricos em detrimento da relação existente com os procedimentos geométricos, o que faz reduzir todo o aspecto relacional entre álgebra e geometria a mera aquisição de fórmulas levando, assim, à perda da característica essencialmente relacional e dinâmica desse conteúdo matemático.

2- Algumas considerações teóricas e hipótese de trabalho

Conforme foi mencionado no item anterior, a aparência da arbitrariedade e justaposição que os conceitos matemáticos assumem para os alunos dos vários níveis de escolarização é explicada frequentemente através de sua identificação com outra questão, a da autonomia que o conhecimento matemático assume, no seu desenvolvimento, em relação aos problemas prático-empíricos.

Tal identificação é também associada ao par categorial abstrato-concreto, o que pode ser notado em expressões correntes como " a matemática escolar é muito abstrata" ou "os conteúdos matemáticos precisam ser ensinados a partir de problemas concretos", "a matemática deve ser ensinada num processo de gradativa elevação do concreto ao abstrato", etc.

A abordagem adotada neste trabalho está orientada por uma fundamentação teórico-metodológica na qual essas questões assumem características diferentes e até mesmo por vezes conflitantes com esse tipo de discurso acima mencionado. O ponto de partida é o mesmo, qual seja, a constatação de que a abstração, no processo de ensino, enquanto momento do processo de conhecimento, tem se transformado, na maioria dos casos, num momento esvaziador da significação dos conceitos. Entretanto, um dos objetivos deste trabalho é o de buscar a superação do significado cotidiano tanto do termo "abstrato" quanto do termo "concreto". Essas duas categorias abordadas segundo os princípios do materialismo histórico-dialético assumem não apenas novos significados, como integram-se numa concepção, ao nosso ver, qualitativamente superior do processo de conhecimento, concepção essa, compatível com o aprofundamento e domínio de uma lógica que contribua para a compreensão e transformação da realidade social. Assim, este trabalho concorda que exista uma dicotomia no ensino de matemática entre o abstrato e o concreto, mas entende que a superação dessa dicotomia não é possível sem a adoção consciente de uma concepção do processo de conhecimento verdadeiramente dinâmica e relacional. Sem isso, as críticas ao cotidiano escolar não ultrapassam o nível das constatações superficiais que pouco contribuem para a busca de soluções efetivas.

A concepção dialética do processo de conhecimento postula uma relação entre o abstrato e o concreto totalmente distinta daquela como essas duas categorias são analisadas usualmente nos artigos e teses sobre ensino de matemática. Para a dialética, o concreto é ponto de partida e de chegada do processo de conhecimento, ou seja, o concreto não é apreensível de forma imediata pelo pensamento, mas sim de forma mediatizada, isto é, através da mediação do abstrato. A clássica análise de MARX (1983:218) no Método da Economia Política mostra como o concreto real é ponto de partida e de chegada do conhecimento. Esse texto é fundamental para compreensão do raciocínio que está aqui sendo utilizado na interpretação da relação abstrato-concreto. Quando MARX mostra, em seu texto, que o concreto real é ponto de partida e de chegada do conhecimento, há de se entender, no entanto, que esses dois momentos de apreensão do concreto se diferenciam. O concreto ponto de partida é o concreto sensorial, empírico, captado nas suas "formas fenomênicas" (KOSIK,1985:10), nas suas propriedades mais acessíveis por meio das sensações do sujeito, o que lhe confere um conhecimento superficial e fragmentário. Já o concreto ponto de chegada, é um concreto apreendido na multiplicidade de suas determinações, isto é, na revelação de sua essência, de suas propriedades mais intrínsecas inacessíveis à apreensão sensorial. É um concreto síntese de suas determinações. Do concreto sincrético ao concreto síntese, o pensamento necessita operar analiticamente, isto é, do todo sincrético, o pensamento precisa separar, dividir os aspectos manifestados em sua imediaticidade de forma a esmiuçar cada aspecto de per si. Isto se dá por meio das abstrações. Nesse momento de análise, o pensamento eleva-se a níveis cada vez mais abstratos, chegando a relações de máxima generalidade, num processo de depuração das abstrações. No entanto, esse movimento analítico não se encerra em si mesmo, pois, revela-se como uma etapa necessária à apropriação do concreto na sua multiplicidade de relações. Assim, as abstrações são mediações necessárias para superação do concreto caótico, sincrético para um concreto enquanto "rica totalidade de determinações e relações numerosas" (MARX,1983:218).

No campo da educação brasileira SAVIANI (1985:12) propõe que o processo educativo seja concebido enquanto processo que vai do empírico, passando pelo abstrato e chegando ao concreto, isto é, um processo que iria da síncrese, passando pela análise até a síntese. Nesse processo, a compreensão do caráter mediador das abstrações constitui-se num dos pressupostos que orienta o ensino de matemática na execução de procedimentos metodológicos coerentes com a lógica de elaboração desses conceitos.

Por outro lado, na medida em que não se compreende a lógica de elaboração dos conceitos e, consequentemente, a função das abstrações nesse processo, os procedimentos de ensino são elaborados de tal forma que negam a função mediadora das abstrações na construção do concreto-pensado e colocam o abstrato como oposto e antagônico ao concreto. O processo de conhecimento não é visto no seu movimento analítico-sintético, pois, estabelece-se uma dicotomia entre o abstrato e o concreto no decorrer dos procedimentos metodológicos.

Essa ausência de relação entre o abstrato e o concreto unilaterializa e deforma o abstrato. Na verdade, a dicotomia distorce os dois pólos da relação: distorce o concreto, pois, o reduz ao empírico; distorce o abstrato, pois, o reduz a um de seus momentos que é o domínio de certas fórmulas matemáticas. Com isto, os aspectos do processo de elaboração dos conceitos matemáticos se reduzem a seu resultado em detrimento de sua relação com sua gênese, fazendo com que os procedimentos de ensino se limitem à operacionalização estéril dos conceitos na sua forma já elaborada, não os apresentando enquanto um momento (o resultado) do processo de elaboração.

Os estudos realizados no decorrer da pesquisa que resultou nesta dissertação, na área da história da geometria analítica, visando compreender a relação entre o abstrato e o concreto no desenvolvimento dos conceitos desse campo da matemática, levaram a conclusão de que também a evolução histórica da geometria analítica pode ser caracterizada como um processo de elaboração das abstrações que têm o significado de mediadoras entre uma visão inicialmente sincrética das figuras geométricas, chegando a uma visão sintética das mesmas.

A análise histórica que será apresentada no capitulo II mostra que a evolução das expressões algébricas deu-se inicialmente através de sua verificação geométrica. Os resultados euclidianos no momento da elaboração dos primeiros resultados algébricos, já eram plenamente desenvolvidos. Como tal, eles foram utilizados como critério de veracidade lógica das proposições algébricas ainda em formação. No entanto, os resultados euclidianos se mostraram insuficientes para melhor caracterização das propriedades quantitativas das figuras geométricas. Eram necessários novos instrumentos matemáticos de investigação. Com o aprimoramento dos resultados algébricos, esses resultados transformaram-se num importante instrumento matemático para elucidação das propriedades algébricas e geométricas da figura (conforme será melhor explicitado, é importante entender que a geometria analítica abarca em seu campo de análise apenas algumas figuras geométricas, ou seja, aquelas possíveis de representação por meio de equações algébricas. Além disso, é necessário mencionar aqui que a matemática já apresenta recursos mais avançados para a algebrização das figuras geométricas que os presentes na geometria analítica). Essa análise histórica mostra que no interior do processo de conhecimento da geometria analítica, o concreto sincrético seria constituído pelas figuras geométricas e o concreto sintético seriam tais figuras na sua multiplicidade qualitativa-quantitativa, isto é, as figuras geométricas entendidas nas suas propriedades algébricas e euclidianas. A mediação aí implícita que garante a apropriação da figura em suas propriedades algébricas e euclidianas a partir da figura caótica, superficial, ocorre através dos conceitos algébricos e euclidianos.

Essas abstrações na utilização dessa análise das figuras geométricas perdem, entretanto, seu significado, quando não são compreendidas no interior desse processo de construção do conhecimento sintético, isto é, do concreto da figura geométrica.

Neste caso, os procedimentos de ensino tornam-se aleatórios porque unilaterializam e deformam o abstrato através de equações algébricas associadas mecanicamente com suas formas geométricas correspondentes.

Entretanto, a essa altura alguém poderia argumentar que há aqui um equívoco, pois, tanto as figuras geométricas quanto os processos algébricos são igualmente abstrações e não tem sentido falar em concreto, seja como ponto de chegada, seja como ponto de partida. A resposta, que será melhor esmiuçada no decorrer da tese, é simples: toda a matemática pode ser considerada como o momento do abstrato, se analisada sob o enfoque da sua relação com o conhecimento humano como um todo. Os números, conteúdo matemático apreendido pelas crianças no início de sua escolarização, são abstrações. Não teria então sentido em falar de concreto no ensino da matemática ?. Esse sentido existe e é absolutamente coerente com o conceito dinâmico que a relação entre o abstrato e concreto adquire na concepção adotada nesse trabalho, a dialética. Nessa concepção, a relação entre o abstrato e o concreto não significa relação entre entes ou estados fixos, mas sim, entre momentos do processo de conhecimento. Isso significa que se esta falando de um movimento cuja tendência é caracterizada a partir de um empírico (sensorial concreto, sincrese, visão caótica do todo), passando pelo abstrato (a análise), para que, através de uma síntese, seja possível chegar a uma totalidade rica de múltiplas determinações, o concreto-pensado.

Nesse movimento, as figuras geométricas podem ser consideradas na sua apreensão inicial pelo aluno, que se depara diante delas como resultados já existentes do processo histórico da construção da matemática, enquanto o sensorial concreto (a síncrese), o empírico (por exemplo, o fato de um círculo já ser para o aluno considerado como um dado já conhecido, assimilado: "um círculo é um círculo"). A análise algébrica e euclidiana da figura pode ser considerada como o momento do abstrato (da análise) e a visão articulada e multirelacional que vai sendo construída com o auxílio do instrumental algébrico, o processo de construção do concreto enquanto síntese de múltiplas determinações.

Mas como foi dito no item anterior, no ensino de geometria analítica o que tem se verificado é justamente a total descaracterização da análise enquanto momento desse processo de construção de uma visão rica e múltipla da figura. O que se vê é uma redução do ensino da geometria analítica ao mero treino de algumas técnicas algébricas e a justaposição de fórmulas às figuras. Isso estaria significando que o problema desse ensino seja o de ele ser muito "abstrato" ? A resposta é decididamente negativa. Isso em nada tem a ver com o abstrato se este for concebido enquanto momento mediador do processo de conhecimento. Quando muito poderia se falar de abstrações fetichizadas, isto é, transformadas em entidades existentes em si e por si.

Desta forma, o estudo da relação abstrato-concreto é decisivo para a superação da aleatoriedade dos procedimentos de ensino promovidos na medida em que ao revelar a lógica de elaboração dos conceitos matemáticos enquanto um processo de ascensão do abstrato ao concreto-pensado, cria as condições necessárias para a correta apreensão dos conceitos através da execução de procedimentos metodológicos coerentes a essa lógica.

A hipótese de trabalho que orientou toda esta dissertação é justamente a de que a superação da dicotomia entre o abstrato e o concreto no ensino da geometria analítica requer a reformulação do conceito de abstrato e de concreto, no sentido de conceber aquele (o abstrato) enquanto momento mediador necessário e positivo do processo de conhecimento do qual resultará o concreto enquanto "síntese de múltiplas determinações" (MARX,1983:218) que se configura, portanto, como ponto de chegada da apreensão do caráter multirelacional da figura geométrica.

Com isso, o presente trabalho não se propõe a apresentar uma proposta já sistematizada de ensino de geometria analítica. Na verdade, a elaboração de tal proposta requer o enfrentamento de todo um conjunto de questões que extrapola o âmbito desta dissertação. Entretanto, em função do comprometimento com a execução desse projeto futuro, o mestrado apresenta-se como um momento importante que em muito contribui para essa elaboração.

Assim, o objetivo dessa dissertação ao apresentar os fundamentos da relação abstrato e concreto na matemática, é justamente defender a necessidade de construção de mediações teórico-metodológicas indispensáveis à elaboração de propostas condizentes com a melhor delimitação e compreensão do ensino de geometria analítica e que, com isso, venha a contribuir para a melhoria da educação matemática no Brasil.

3- Plano do Trabalho.

Essa dissertação é composta de três capítulos.

O primeiro capítulo intitula-se "A relação abstrato-concreto no ensino da geometria analítica".

Neste capítulo são definidos os conceitos de abstrato e concreto para a investigação da problemática, bem como é apresentado o pressuposto teórico adotado na interpretação dessa relação. Para tanto, a adoção como referencial teórico do materialismo histórico-dialético explica-se pela necessidade de fundamentar o processo pedagógico numa teoria do conhecimento que articule organicamente os processos cognoscitivos e a atitude de busca da transformação consciente da realidade social através de uma concepção de matemática coerente com essa organicidade. Em outras palavras, trata-se de buscar uma teoria do conhecimento que possibilite ao educador traduzir seu compromisso político na sua atividade especificamente pedagógica.

Esse primeiro capítulo compõem-se de quatro sub-ítens assim, apresentados:

I.1-Introduzindo a questão.

I.2-Os diferentes níveis da relação abstrato-concreto na produção do conhecimento matemático e no caso específico do ensino da geometria analítica.

I.3-A concepção dialética do processo de conhecimento enquanto ascensão do abstrato ao concreto.

I.4- O concreto e o abstrato na evolução histórica da geometria analítica.

O segundo capítulo intitulado “O desenvolvimento histórico da relação entre o abstrato e o concreto na geometria analítica" procura caracterizar as etapas históricas essencias do desenvolvimento da geometria analítica sob a óptica dessa relação, para que assim, seja possível caracterizar a lógica de elaboração de seus conceitos para posterior análise dos procedimentos de ensinos.

Esse capítulo apresenta os seguintes sub-ítens:

II.1- Introdução

II.2-Da empiria das figuras geométricas para elaboração das primeiras abstrações algébricas.

Este sub-ítem se divide em três momentos:

II.2.1- As limitações da representação numérica grega no tratamento de grandezas incomensuráveis e suas conseqüências para o posterior desenvolvimento algébrico.

II.2.2- A álgebra geométrica grega.

II.2.3- A noção de coordenadas em APOLÔNIO e MENAECMO.

O terceiro sub-ítem apresenta-se com a seguinte denominação:

II.3.- A gênese dos procedimentos algébricos: do atrelamento à figura ao seu processo de autonomia pela dicotomia em relação aos procedimentos geométricos.

Esse terceiro sub-ítem também se divide em três momentos:

II.3.1- Os trabalhos aritméticos e algébricos presentes entre os gregos: dos "Elementos" de EUCLIDES aos trabalhos de HERON de Alexandria, NICÔMACO de Gerasa e DIOFANTO.

II.3.2- A contribuição dos trabalhos hindus e árabes.

II.3.3- A álgebra na Europa: as traduções das obras árabes e hindus, o aprimoramento da simbologia algébrica.

Finalmente, há um quarto e último sub-ítem denominado:

II.4- A geometria analítica em DESCARTES e FERMAT: o momento da síntese entre os processos algébricos e geométricos.

Após a apresentação dos sub-ítens há um momento de síntese do capítulo denominado “Considerações finais sobre esse capítulo”.

O terceiro capítulo intitulado "O ensino da geometria analítica: em busca da superação da dicotomia entre o abstrato e o concreto" esmiuça a análise da problemática decorrente da dicotomia entre o abstrato e concreto nos procedimentos de ensino. É o capítulo em que se explicita as causas e conseqüências desta dicotomia no processo de apreensão dos conceitos matemáticos, bem como, apresenta alguns subsídios para a superação desta dicotomia. Para tanto, esse capítulo parte de um problema específico de geometria analítica para análise de todas questões aí decorrentes da ausência de relação entre o abstrato e o concreto. Desta análise, este capítulo pretende apontar algumas diretrizes para elaboração futura de uma proposta de ensino sistematizada de geometria analítica.

Assim como os demais, esse capítulo apresenta alguns sub-ítens:

III.1- Introdução

III.2- Análise do problema selecionado.

III.2.1- Sobre o problema a ser analisado.

III.2.2- Sobre as retas.

III.2.3- Sobre o coeficiente angular e linear.

III.2.4- Sobre o sistema cartesiano de coordenadas.

III.2.4.1- A elaboração do conceito de coordenadas a partir dos elementos geométricos.

III.2.4.2- A elaboração do conceito de coordenadas a partir dos elementos algébricos.

Finalmente, nas "Considerações Finais" apresenta-se alguns aspectos relevantes desenvolvidos ao longo desse trabalho, aspectos esses, que necessariamente propiciam novas reflexões sobre o ensino de matemática.

CAPÍTULO I : A RELAÇÃO ABSTRATO-CONCRETO NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA.

I.1- Introduzindo a questão.

Como foi visto na introdução deste trabalho, um dos problemas presentes no ensino de matemática diz respeito a execução de procedimentos de ensino que promovem uma arbitrariedade no processo de compreensão e re-elaboração dos conceitos matemáticos por parte do aluno.

No caso da geometria analítica, os procedimentos de ensino apresentam uma dicotomia entre os conceitos algébricos e geométricos através da redução da relação entre álgebra e geometria a mera associação mecânica entre curvas e equações pela execução de determinadas fórmulas. Prioriza-se o produto do processo da elaboração dos conceitos da geometria analítica, no que diz respeito a apenas um de seus aspectos, isto é, a execução de fórmulas.

Na verdade, adiantando o que será devidamente analisado no capítulo III, os aspectos intrínsecos que compõem a lógica interna de elaboração do conhecimento matemático se reduzem, naquele processo de ensino, a apenas um momento dessa elaboração, o momento da operacionalização da lógica do cálculo.

Visando contribuir para a superação desse problema do ensino de matemática em geral e do ensino de geometria analítica em particular, a hipótese de trabalho também apresentada na introdução, postula a necessidade de superação da concepção corrente acerca das relações entre as categorias do abstrato e concreto, através da concepção dialética do processo de conhecimento enquanto ascensão do abstrato ao concreto.

Considerando o processo de conhecimento humano em geral enquanto apreensão, pelo pensamento, da realidade concreta, a produção dos conceitos matemáticos pode ser considerada como sendo um momento desse processo, o momento da ascensão do concreto empírico às abstrações, sendo o momento seguinte, o de caminhar, desta vez, das abstrações ao concreto pensado, "saturado" do real.

No entanto, é preciso esclarecer que as categorias abstrato e concreto não são entendidas como sendo categorias de mera classificação do processo de apreensão da realidade. O par categorial abstrato-concreto indica sempre uma tendência no interior deste processo de apreensão, pois, a concretitude do pensamento é sempre tendencial, é uma tendência a se atingir o concreto. Sendo assim, abstrato e concreto não podem ser interpretados como algo pronto e acabado, mas sim, de acordo com o ponto de referência definido e o nível em que essa análise está sendo feita.

Buscando caracterizar melhor o assunto, o próximo item coloca alguns esclarecimentos acerca do uso da relação abstrato-concreto na análise do conhecimento matemático e no ensino da geometria analítica.

I.2- Os diferentes níveis da relação abstrato-concreto na produção do conhecimento matemático e no caso específico do ensino da geometria analítica.

Nessa perspectiva da relação entre o abstrato e o concreto enquanto tendência do processo de conhecimento e não enquanto relação entre estados fixos, a primeira coisa a se fazer é delimitar o nível que está sendo analisado.

Assim, por exemplo, na relação entre as figuras geométricas e os objetos reais, aquelas seriam o abstrato e esses o concreto-empírico. Ocorre que o pensamento a partir desse empírico, ao elaborar as figuras geométricas, permite uma percepção do real mais sintética. De certa forma, as figuras obtidas em função da análise comum dos objetos reais organizam melhor a visão desse real, e só é possível graças a esse real.

Dessa forma, o concreto-pensado é esse real depurado, compreendido nas figuras geométricas que representam seus objetos. Portanto, o concreto ponto de partida e de chegada do conhecimento é o objeto real. A figura geométrica é a mediação entre o objeto real inicialmente sincrético e, agora, síntese, isto é, o objeto compreendido na sua forma análoga em relação aos demais, forma essa que é a figura geométrica.

Ocorre que o conhecimento matemático se utiliza dessa mesma relação elaborando uma estrutura conceitual qualitativamente mais rica, isto é, as figuras geométricas passam a não se restringirem às suas formas em si mesmas, elas passam a serem investigadas no que diz respeito as suas propriedades mais íntrinsecas. Neste momento, as figuras passam a ser um dado empírico do concreto e essas propriedades seriam a forma abstrata de tratar esse dado empírico. Neste caso, tem-se um outro nível da relação abstrato-concreto em relação ao primeiro exemplo dado. As figuras geométricas, que no primeiro caso acima descrito caracterizavam-se como uma abstração em relação aos objetos reais, neste segundo caso, passam a ser consideradas como um dado empírico do concreto em relação ao produto conceitual da investigação de suas propriedades, isto é, os conceitos da geometria euclidiana. Portanto, nesse caso, o concreto ponto de partida e de chegada do conhecimento é a figura geométrica. Os conceitos euclidianos são a mediação entre a figura sincrética só manifestada em sua imagem geométrica e essa figura apreendida nas suas propriedades mais íntrinsecas sistematizadas nos conceitos euclidianos.

Na geometria analítica a relação abstrato-concreto situa-se num terceiro nível. Embora o movimento a partir da figura pela análise com retorno à figura se repita, a análise se dá num nível de abstração maior. Nesse momento, as abstrações alcançadas não estão atreladas à figura geométrica, fato esse próprio dos conceitos euclidianos. É possível um nível de elaboração conceitual (os conceitos algébricos) em que ocorre uma libertação da empiria da figura geométrica. Assim, embora a figura geométrica também seja o concreto ponto de partida e de chegada do conhecimento, aqui o concreto ponto de chegada diferencia-se em relação ao caso anterior. As mediações utilizadas, por abarcarem além dos resultados euclidianos, os resultados algébricos, determinam uma compreensão da figura enquanto uma síntese de suas propriedades algébricas e euclidianas. É por isso que, nesse sentido, considera-se que a geometria analítica trabalha com níveis de abstração mais ricos que na geometria euclidiana.

No caso da geometria analítica, a incorporação do instrumental algébrico possibilitou uma relativa autonomia em relação à figura. O que seria a grande inovação da geometria analítica, no processo de ensino, surge como um problema: a autonomia transforma-se em dicotomia. Assim, álgebra e geometria aparecem no ensino como disciplinas desconexas, a relação possível é reduzida a mera associação mecânica entre curvas e equações pela ênfase na manipulação das equações algébricas. Os procedimentos de ensino não instrumentalizam o aluno a apreender a geometria analítica enquanto um momento analítico mediador entre uma visão inicialmente sincrética da figura e uma visão sintética da mesma ao final do processo de ensino. Os procedimentos de ensino, portanto, negam a função mediadora das abstrações na construção do concreto-pensado, o que determina que o processo de conhecimento não seja visto no seu movimento analítico-sintético. O abstrato e o concreto aparecem dicotomizados.

Assim, para a análise e superação desse problema, é necessário compreender a relação abstrato-concreto como representação do processo de ascensão do conhecimento a partir do concreto-empírico até atingir o concreto-pensado por meio das abstrações de forma a revelar, nesse processo, os conceitos algébricos e euclidianos como as mediações necessárias para a obtenção da figura na sua compreensão geométrica e algébrica a partir de sua forma inicialmente sincrética.

Esse nível, quando não compreendido no processo de ensino-aprendizagem, produz dois momentos de distorção na compreensão da relação entre o abstrato-concreto:

1º) a dicotomia entre as formas algébricas e as formas geométricas;

2º) a conseqüência dessa interpretação dicotômica, isto é, a não compreensão da geometria analítica como momento de produção do conhecimento matemático enquanto passagem do abstrato ao concreto pensado, enquanto um processo contínuo da relação abstrato-concreto.

No entanto, para entender esses dois momentos, é necessário primeiramente esclarecer alguns aspectos teóricos do par categorial abstrato-concreto. Para isso, optou-se por utilizar o referencial teórico do materialismo histórico- dialético.

I.3- A concepção dialética do processo de conhecimento enquanto ascensão do abstrato ao concreto.

Antes de entrar na análise da relação abstrato-concreto sob o ponto de vista do materialismo histórico-dialético, convém aqui fazer uma breve observação sobre a visão da relação entre a escolha da dialética enquanto teoria do conhecimento e a função político-ideológica da prática pedagógica.

SAVIANI (1985:11) analisando justamente essa questão, aborda a educação sob a perspectiva de sua forma específica de inserção na luta hegemônica, isto é, enquanto processo de ascensão da consciência, do nível do senso comum ao da consciência filosófica. Para isso, salienta, e necessário que o educador disponha de "instrumentos lógico-metodológicos cuja força seja superior aqueles que garantam a força e a coerência da concepção dominante". Trata-se, portanto, da adoção de uma concepção gnosiológica que possibilite ao pensamento e à ação pedagógica a ascensão de sua ineliminável função política ao nível de uma função política conscientemente direcionada no sentido da superação das relações sociais de dominação.

No que diz respeito ao ensino de matemática, DUARTE (1987a:88) coloca a necessidade do educador aprender a dirigir intencionalmente a dimensão política intrínseca ao processo de socialização do conteúdo matemático. Para tanto, há de se desenvolver um modo de agir e pensar que possibilite ao educando captar a realidade enquanto processo, conhecer as leis internas de seu desenvolvimento, de forma a instrumentalizá-lo para a conscientização das possibilidades de transformação do real.

A lógica dialética revela-se ser o instrumento lógico-metodológico eficaz para o entendimento do real porque ela e a própria expressão da relação entre as leis do pensamento e as leis da realidade objetiva. Como afirma KOPNIN (1978:53):

> Uma vez apreendidas, as leis do mundo objetivo se convertem em leis também do pensamento, e todas as leis do pensamento são leis representadas do mundo objetivo; revelando as leis de desenvolvimento do próprio objeto, apreendemos também as leis de desenvolvimento do conhecimento e vice-versa, mediante o estudo do conhecimento e suas leis descobrem-se as leis do mundo objetivo. E justamente por isso que a dialética revela as leis do movimento dos objetos e processos, converte-se ainda em método, em lógica do avanço do pensamento no sentido do descobrimento da natureza objetiva do objeto, dirige o processo de pensamento segundo leis objetivas visando a que o pensamento coincida em conteúdo com a realidade objetiva que fora dele se encontra e, após concretizar-se em termos práticos, leve ao surgimento de um novo mundo de objetos e relações.

Após essas observações é possível agora voltar à análise proposta neste sub-item acerca da relação abstrato-concreto sob o ponto de vista do materialismo histórico-dialético.

Segundo o materialismo histórico-dialético, a realidade objetiva não se apresenta ao pensamento de imediato. O que o pensamento de início capta do real são apenas manifestações desse real, isto é, manifestações de seus elementos mais perceptíveis.

Esses elementos do real mais perceptíveis, apresentam-se ao pensamento numa unidade caótica, como um todo confuso em que, num primeiro momento, não se evidenciam seus diferentes aspectos e relações.

Desse todo confuso superficialmente captado, o pensamento elabora abstrações necessárias para identificar cada parte de per si e suas múltiplas relações. Para tanto, há um afastamento do pensamento em relação ao real através de um processo analítico em que o todo captado na sua superficialidade se decompõe em suas partes. Essas abstrações revelam um entendimento de cada parte isoladamente em todos os seus aspectos e propriedades mais intrínsecas.

Porém, o entendimento do real no pensamento não se reduz ao momento analítico das partes de per si. O pensamento não se encerra em abstrações, mas rearticula cada uma das partes em suas múltiplas relações para que se capte toda sua realidade. Das determinações abstratas, portanto, o pensamento promove, num movimento de síntese, uma articulação de suas partes em que, agora, a imagem do objeto passa a não ser mais um todo caótico, mas sim, um todo coeso compreendido em sua essência, na unidade de suas ligações e relações.

O filosófo tcheco Karel KOSIK (1985:30) afirma:

> O método da ascensão do abstrato ao concreto e o método do pensamento; em outras palavras, é um movimento que atua nos conceitos, no elemento da abstração. A ascensão do abstrato ao concreto não é uma passagem de um plano (sensível) para outro plano (racional); é um movimento no pensamento, e do pensamento. Para que o pensamento possa progredir do abstrato ao concreto, tem aí que mover-se no seu próprio elemento, isto é, no plano abstrato, que é a negação da imediaticidade, da evidência e da concreticidade sensível. A ascensão do abstrato ao concreto é um movimento para o qual todo início é abstrato e cuja dialética consiste na superação desta abstratividade. O progresso da abstratividade à concreticidade e, por conseguinte, em geral movimento da parte para o todo e do todo para a parte; do fenômeno para a essência e da essência para o fenômeno; da totalidade para a contradição e da contradição para a totalidade; do objeto para o sujeito e do sujeito para o objeto.

Explicando com outras palavras: o processo dinâmico de captação da realidade no pensamento através de um movimento de afastamento e retorno à realidade objetiva se dá por meio da relação entre o abstrato e o concreto.

Primeiramente, o concreto manifesta-se como dados empíricos da realidade objetiva imediatamente perceptível, como sendo um todo caótico, sem captar sua composição em diversos aspectos e relações.

É necessário aqui abrir um "parênteses" para esclarecer o seguinte fato: o termo "imediatamente" empregado na expressão "imediatamente perceptível" é em certo sentido incorreto. Segundo autores da psicologia sob orientação dialética (LURIA (1988,39), LEONTIEV (1964,233)) mesmo as percepções mais elementares nunca são imediatas. Sua apreensão no pensamento já requer um nível de elaboração conceitual, não é, portanto, uma relação direta. Por outro lado é correto afirmar que as sensações captadas pelo sujeito são menos mediatizadas que o conhecimento teórico. Por essa razão, o termo "imediaticidade" nesse trabalho será substituído por "relativa imediaticidade".

Assim, o rompimento da relativa imediaticidade do conhecimento sensorial se dá no pensamento através das abstrações, que são mediadoras no processo de construção do concreto no pensamento.

Enquanto processo de rompimento da relativa imediaticidade dos dados do real, as abstrações tem a função de desvendar o concreto pela caracterização de cada parte constitutiva do todo e de suas relações internas. Essa decomposição do concreto no pensamento tem como objetivo sua própria composição num todo mais rico, na medida em que passa a ser melhor compreendido, mais eivado de concreticidade. O abstrato, portanto, é uma mediação entre o dado empírico e a compreensão real do todo, pois considera esse todo desde suas primeiras manifestações ao pensamento até sua essência. O pensamento através dessa mediação da abstração parte, pois, do concreto sensível relativamente imediato para um concreto pensado compreendido. Entretanto, é necessário esclarecer que o abstrato e o concreto não são momentos distintos do processo de elaboração do conhecimento. Na verdade, eles coexistem através de uma unidade de contrários. Segundo KOPNIN (1978:162):

> O movimento do conhecimento do sensorial-concreto - através do abstrato - ao concreto, que reproduz o objeto no conjunto de abstrações é uma manifestação da lei da negação da negação. O abstrato é a negação do sensorial-concreto. O concreto no pensamento é a negação do abstrato, mas o concreto mental não é a retomada do concreto inicial, sensorial mas o resultado da ascensão a um concreto novo, mais substancial.

O conhecimento da realidade, portanto, impõem uma superação da relativa imediaticidade da representação empírica inicial. O abstrato é a negação do concreto inicial, o concreto sensório-perceptivo é o meio de se atingir o concreto real pensado. As abstrações são, portanto, mediações de um concreto caótico, obscuro, para um concreto na compreensão da multiplicidade de suas partes. O concreto, portanto, revela-se como ponto de partida e de chegada do processo de elaboração do conhecimento. Nas palavras de MARX (1983:218):

> É por isso que ele <o concreto> é para o pensamento um processo de síntese, um resultado, e não um ponto de partida, apesar de ser o verdadeiro ponto de partida e portanto igualmente o ponto de partida da observação imediata e da representação.

É importante ressaltar, porém, o carater de superação da "abstratividade" das abstrações. Conforme já descrito acima, as abstrações são o momento do pensamento em que se supera a caoticidade do todo pela compreensão de suas partes. Porém, essas partes se tomadas isoladamente em si e por si, geram a atomização do todo, não permitindo a compreensão das relações que se dão entre essas partes, compreensão esta necessária para a reprodução qualitativamente nova do concreto no pensamento. Segundo LEFEBVRE (1987:273):

> só é propriamente abstrato o pensamento que estaciona "numa forma negativa" do conceito, ou seja, que se coagula ao nível do entendimento analítico, subjetivamente, arrancando da interação universal o fenômeno do ser em questão.

> A abstração, nesse caso, deixa de ter uma função, de ser um momento ou um grau no movimento do conhecimento. Fixada na unilateralidade, torna-se abstração no sentido pejorativo, mesmo (ou melhor, sobretudo) quando pretenda se completar por meio de representações fantásticas. Passa-se assim da forma ao formalismo, da abstração fecunda à abstração vazia.
>
> (grifos do autor)

Assim, as abstrações enquanto aprofundamento do concreto, não podem ser entendidas como o único momento do processo de reprodução do concreto no pensamento, como que seccionando o movimento de reprodução pela visão estática de mera operacionalização de conceitos oriundos da realidade concreta. Se por um lado, de fato, ocorre esse momento de afastamento da realidade pela necessária captação e articulação de seus dados, tal momento não esgota todo o processo de produção do conhecimento. A articulação dos dados visa desvendar a relação entre a essência, isto é, as estruturas mais intrínsecas e os dados empíricos captados, relação essa que explica o concreto em toda sua totalidade.

Como se pode deduzir daí, a formação do conceito não se dá através de uma seqüência desconexa de abstrações. Cada abstração está intrinsecamente relacionada a outras que, em seu conjunto, criam o conceito do concreto investigado. Assim, segundo ROSENTAL(1960:315) o processo de formação dos conceitos apresenta dois momentos recíprocos:

1º) o processo constante de se captar aspectos cada vez mais profundos do objeto;

2º) a intencionalidade de se captar o objeto na totalidade de seus aspectos.

O movimento do empírico ao abstrato e deste ao concreto pode ser representado graficamente por uma espiral. Cada elo da espiral capta os conhecimentos anteriormente assimilados superando-os em novos conceitos através da incorporação do núcleo válido dos velhos conceitos que são articulados na elaboração desses novos conhecimentos. Assim, cada fase do ciclo de elaboração do conhecimento é uma fase qualitativamente superior da fase anterior, pois, a anterior está intimamente incorporada a nova.

Por outro lado, o processo de elaboração por espiral revela que a produção do conhecimento é um processo de superação do conhecimento relativamente imediato por um conhecimento constituído por mediações cada vez mais elaboradas, profundas e complexas.

Explicando melhor: a imagem caótica do objeto expressa sua compreensão superficial na medida em que este conhecimento o apresenta tal como ele é em aparência. O relativo imediato impõe seu conhecer, a superação de seu estado aparente.

Esse relativo imediato é superado pelo conhecimento das abstrações. Mas enquanto um conjunto de relações que jamais se esgotam em si mesmas na tarefa de apreensão do objeto, cada abstração é meio de produção de novas abstrações , isto é, cada abstração constitui-se mediação na construção de novas abstrações.

No entanto, esse conhecimento mediato quando já adquirido e assimilado, apresenta também um caráter de conhecimento relativamente imediato, mas um imediato superior em relação aos anteriormente apreendidos na escala da elaboração do conhecimento.

Num caráter mais amplo, percebe-se que na ascensão do abstrato ao concreto, as abstrações são mediações entre um concreto caótico e um concreto apreendido em sua essência. Além dessa função de mediação de um concreto a outro, uma abstração pode ser mediação para obtenção de outras abstrações. Nesse sentido, enquanto meio de elaboração das demais abstrações o conhecimento dessas abstrações iniciais torna-se elementar, imediato.

Nesse processo de mediações crescentes, o mediato transforma-se em imediato, isto é, transforma-se em ponto de partida já dado, conhecido, dominado, a partir do qual serão elaboradas cadeias cada vez mais complexas de mediações. Mas essa transformação coloca o conhecimento em um patamar superior. O imediato inicial, isto é, o conhecimento sensorial é negado pelo conhecimento mediato das primeiras abstrações; estas superadas constituem-se em imediato, um imediato superior do imediato das sensações pois são conseqüências de abstrações mais ricas que as primeiras. Daí a interpretação do desenvolvimento do conhecimento em espiral.

Por outro lado, o método de ascensão do abstrato ao concreto, ao revelar o método de investigação da realidade objetiva a partir da casualidade dos fenômenos do real, retrata, nos termos empregados por KOSIK (1985,11), a desfechitização do mundo da pseudoconcreticidade através da compreensão da realidade enquanto totalidade concreta. Explicando melhor: pseudoconcretas são aquelas concepções da realidade que reduzem o real ao empírico, ao "imediatamente" visível, aquilo que pode ser enquadrado no esquema explicativo do pensamento pragmático-utilitarista. A pseudoconcreticidade é imediatista, é evidente, e dessa forma, penetra na consciência do indivíduo dando-lhe uma aparência natural, independente. Para a pseudoconcreticidade o concreto real dispensa mediações para ser apreendido pelo pensamento. O conhecimento se basta ao nível empírico, sensorial, das manifestações dos fenômenos. Dai, a fechitização da realidade, isto é, os fenômenos que povoam o real adquirem uma existência própria, independentes entre si.

Já a totalidade concreta para KOSIK é a realidade compreendida nas suas relações, conexões internas, onde um fato qualquer possa ser racionalmente compreendido de forma que nesse processo o pensamento revela uma série de conexões: do fenômeno, a essência; da aparência independente do fenômeno, sua lei, seu caráter mediato; da causalidade, sua determinação interna; da contemplação, sua atividade. Entretanto, totalidade não deve ser aqui entendida como uma mera acumulação de fatos. KOSIK (1985,36) esclarece:

> Os fatos são conhecimento da realidade se são compreendidos como fatos de um todo dialético - isto é, se não são atomos imutáveis, indivisíveis e indemonstráveis, de cuja reunião a realidade saia constituída - se são entendidos como partes estruturais do todo. O concreto, a totalidade, não são, por conseguinte, todos os fatos, o conjunto dos fatos, o agrupamento de todos os aspectos, coisas e relações, visto que a tal agrupamento falta ainda o essencial: a totalidade e a concreticidade. Sem a compreensão de que a realidade é totalidade concreta - que se transforma em estrutura significativa para cada fato ou conjunto de fatos - o conhecimento da realidade concreta não passa de mística, ou a coisa incognoscível em si.

Pensando a prática educativa como um momento desse processo concreto-real global, a destruição da pseudoconcreticidade (do mundo fechitizado) pode ser identificada com a proposta apresentada por Dermeval SAVIANI de elevação dessa prática educativa do nível do senso comum ao nível da consciência filosófica. Nas palavras de SAVIANI (1985,10):

> Passar do senso comum à consciência filosófica significa passar de uma concepção fragmentária, incoerente, desarticulada, implícita, degradada, mecânica, passiva e simplista a uma concepção unitária, coerente, articulada, explícita, original, intencional, ativa e cultivada.

No entanto, como já foi dito no início deste item, SAVIANI (1985:11) observa que a passagem do senso comum à consciência filosófica não é possível sem um método, sem uma lógica. Os instrumentos lógico-metodológicos que orientariam a execução dessa passagem estariam presentes no "Método da Economia Política" de Karl MARX (1983:218). Assim, SAVIANI (1985,13) propõe que o processo educativo seja concebido enquanto passagem da "representação caótica do todo" à "síntese de múltiplas determinações" pela mediação das abstrações, isto é, um processo de síncrese, análise e síntese.

Ora, no bojo desse processo, a apropriação do conhecimento sistematizado pela humanidade (tarefa precípua da prática educativa) não poderia se dar segundo pressupostos lógico-metodológicos conflitantes com a concepção de conhecimento da realidade enquanto realidade concreta.

Mas, o método de ascensão do abstrato ao concreto ao esmiuçar o processo dinâmico do conhecimento enquanto processo de síncrese, análise e síntese, propicia subsídios para a própria captação da lógica de elaboração desses conceitos na medida em que nesse processo há a necessidade metodológica de explicitação dessa apropriação através de uma estrutura de conceitos logicamente definidos. O movimento sincrético-analítico-sintético constitui, nas palavras de SAVIANI (1985a:77)

> uma orientação segura tanto para o processo de descoberta de novos conhecimentos (o **método científico**) como para o processo de transmissão-assimilação de conhecimento (o **método de ensino**). (grifos nossos)

Assim, no que se refere ao ensino da geometria analítica, a tarefa aí colocada é concebê-la enquanto um processo sincrético-analítico-sintético, o que requer vê-la enquanto um momento da ascensão do abstrato ao concreto. O próximo item apresenta alguns subsídios teóricos para a execução dessa tarefa.

I.4 - O concreto e o abstrato na evolução histórica da geometria analítica.

A compreensão da geometria analítica enquanto um processo sincrético-analítico-sintético revela a necessidade de se captar esse processo ao longo de sua história. Compreende-se que, a essência lógica dos conceitos da geometria analítica, se por um lado se faz captar implicitamente na relação abstrato-concreto, por outro lado, delineia-se na constante realização dessas abstrações no movimento de sua história.

A geometria analítica surgiu com o desenvolvimento dos conceitos algébricos num estágio em que foi possível a utilização desses conceitos na análise dos procedimentos geométricos dos antigos geômetras gregos. Até então, os conceitos algébricos não se constituiam num instrumento matemático próprio de investigação. Os primeiros conceitos algébricos eram aceitos mediante a comprovação geométrica segundo os procedimentos da geometria euclidiana. A trajetória histórica de elaboração da geometria analítica retrata, portanto, dois momentos:

1º) O nascimento dos primeiros resultados algébricos aceitos geometricamente na medida em que a geometria euclidiana era a forma existente mais avançada da produção matemática;

2º) O desenvolvimento posterior de uma linguagem algébrica própria , em que ocorre uma desvinculação da justificativa geométrica, transformando-se num instrumento de investigação dos conceitos geométricos que foram sua origem.

Assim, a relação abstrato-concreto na geometria analítica apresenta o abstrato como sendo o corpo teórico que abrange os conceitos algébricos e euclidianos. O concreto sincrético é a figura geométrica. Essa figura ao ser mediada pelas abstrações algébricas e euclidianas, torna-se concreto-pensado, isto é, apresenta-se ao sujeito revelada em toda sua multiplicidade de determinações e relações.

A análise histórica da lógica de elaboração da geometria analítica revela-se como sendo um instrumental metodológico investigativo de grande valor heurístico para a compreensão da relação abstrato-concreto nesse campo da matemática. Tanto a elaboração quanto a execução de uma seqüência de ensino, na qual a lógica dos conceitos traduz a intrínseca historicidade, requer da parte do educador/pesquisador a análise da evolução histórica da lógica dos conceitos. De uma forma geral, pode-se afirmar que a relação lógico-histórica é um método de investigação indispensável para a pesquisa em educação matemática, na medida em que, na elaboração de procedimentos de ensino executados de forma a conduzirem a correta apropriação dos conceitos matemáticos, há de se entender o processo lógico de elaboração desse conteúdo. É essa investigação da evolução histórica que vai fornecer elementos para elaboração de uma seqüência lógica de ensino, mas de forma que essa seqüência lógica reflita a história. Portanto, o fio condutor aí presente, imprescendível, que orienta a investigação da seqüência de ensino e a relação lógico-histórica.

Especificamente no caso dessa dissertação, a investigação lógico-histórica desenvolve-se em função da relação abstrato-concreto. Há de se ver, no decorrer do processo histórico de elaboração lógica dos conceitos, o movimento do pensamento na apropriação dos conceitos da geometria analítica dando-se a partir das abstrações para explicitação do concreto em toda sua multiplicidade.

Para isso, é necessário que inicialmente se diferencie, na investigação histórica da geometria analítica, a sua história vista em função da relação abstrato-concreto, da sua história propriamente dita. A última, se orientada para execução de procedimentos de ensino, revela-se ineficaz. Explicando: a seqüência lógica de apropriação dos conceitos pelo aluno no processo de ensino-aprendizagem caracteriza-se pela gradação crescente de dificuldades. Porém, a história dos conceitos não se realiza na mesma seqüência lógica das etapas essenciais de sua evolução. Em outras palavras, a história factual, cronológica apresenta uma série de informações, elementos, caminhos não só desnecessários para a compreensão pelo educador da lógica de elaboração dos conceitos, como até mesmo desviadores em relação aos aspectos fundamentais. O educador, não dispondo de um instrumental metodológico-investigativo (a relação lógico-histórica) não consegue diferenciar os momentos fundamentais daqueles não fundamentais (não fundamentais porque se tem em vista o processo de apropriação dos conceitos, mas não que para a investigação histórica propriamente dita esses elementos sejam não fundamentais). Muitas vezes, o educador toma esses últimos para a apresentação do conteúdo. Às vezes chega ao extremo de reduzir o processo de ensino a uma reprodução da história, como se o simples conhecimento da história de um conceito fosse o suficiente para a compreensão de sua lógica. Por essa razão é que acima se falou da ineficácia de um mero estudo da história da geometria analítica, como um todo para orientar a execução de procedimentos de ensino.

Assim, não se trata de reproduzir a história, mas sim, de reproduzir, no processo de sincrese-análise-síntese, a essência lógica das relações do conhecimento na sua forma atual, os traços essenciais que sintetizam de forma lógica o desenvolvimento histórico desse conteúdo.

Entretanto, esses traços essenciais não necessariamente se apresentam na história na mesma seqüência lógica, sistematizada dos conceitos hodiernos. A história nem sempre caminha das determinações mais simples (o abstrato) às mais complexas (o concreto). Como entender isso ? MARX (1983:218) no "O Método da Economia Política" apresenta alguns subsídios para esse entendimento.

Cabe aqui um esclarecimento. A interpretação adotada nesta dissertação, da análise feita por MARX no Método da Economia Política, da correlação entre a relação abstrato-concreto e a relação lógico-histórico origina-se nos estudos realizados pela orientadora e pelo co-orientador desta dissertação, estudos esses dos quais o autor deste trabalho teve a oportunidade de participar tanto em disciplinas do Programa de Pós-Graduação (Leituras Dirigidas e Seminários Avançados em Filosofia da Educação) quanto em reuniões de estudo com o co-orientador. Esses estudos serão sintetizados em um texto que está em preparação pela orientadora e co-orientador.

Antes de iniciar a análise dessa questão, é importante esclarecer que os termos "simples" e "complexos" utilizados para designar as categorias (as determinações) que explicam o real estão sendo aqui utilizados no mesmo sentido empregado por MARX (1983,218). MARX utiliza os termos "categorias simples", "categorias abstratas" ou "categorias que expressam relações unilaterais" como várias maneiras de se referir a mesma coisa. As categorias simples significam categorias mais abstratas, pois, traduzem uma relação unilateral não envolvendo múltiplas relações na sua significação. Já as categorias concretas ou complexas, envolvem na sua definição, múltiplas relações. Quando MARX refere-se a uma categoria mais simples, mais abstrata está comparando-a com outra, que em relação a esta primeira, é mais complexa, mais concreta. Por exemplo, MARX ao analisar a categoria jurídica de posse enquanto categoria mais simples, mais abstrata, mais unilateral, está comparando-a à categoria família, que em relação à posse, é uma categoria mais concreta, mais múltipla, mais multirelacional.

No que diz respeito a geometria analítica, as coordenadas geométricas são um exemplo de conceito (categoria) simples em relação à circunferência, que em relação às coordenadas, é mais complexa. A definição de coordenadas geométricas expressa a relação de biunicidade entre os procedimentos algébricos e geométricos a partir da correspondência biunívoca entre reta e números reais. Já o conceito de circunferência, envolve na sua elaboração múltiplas relações (coordenadas, distância entre dois pontos, lugar geométrico).

Retomando agora a questão acima formulada, qual seja: a história não caminha necessariamente do simples ao complexo, do abstrato ao concreto. "O Método da Economia Política" inicia-se com a discussão de qual seria o método cientificamente correto de reprodução do concreto no pensamento. O concreto, o todo complexo das múltiplas relações seria o ponto de partida ou o ponto de chegada do conhecimento? MARX (1983:218) divide a história da economia política em duas fases. Na primeira, a "nascente economia política" adotava, como procedimento metodológico, partir sempre de um todo concreto vivo, já dado. No decorrer do processo de elaboração teórica os economistas chegavam, porém, invariavelmente, aos conceitos mais simples que expressavam relações abstratas e gerais. Na segunda fase da história da economia política, a fase da "economia política clássica" seguia-se o caminho inverso. Os economistas partiam das abstrações mais simples e gerais, e no processo de elaboração teórica, construíam os sistemas econômicos enquanto todos complexos e multirelacionais. MARX afirma que o segundo caminho é o método cientificamente correto de reprodução do concreto pelo pensamento.

Isso significaria, então, que MARX considera o momento da síncrese, isto é, o momento da "representação caótica do todo" como um momento a ser eliminado do processo teórico ? A interpretação aqui adotada é a que não se trata de eliminar esse momento do processo de conhecimento, mas sim, que o método que vai do abstrato ao concreto mantém sempre como pano de fundo a representação caótica do todo e que o concreto-pensado enquanto produto final do processo de conhecimento supera, por incorporação, o concreto caótico que está no ponto de partida do pensamento. Essa interpretação está presente nas palavras do próprio MARX (1983:219):

> a totalidade concreta enquanto totalidade-de-pensamento, enquanto concreto-de-pensamento, é de fato um produto do pensamento, da atividade de conceber; ele não é pois de forma alguma o produto do conceito que engendra a si próprio, que pensa exterior e superiormente à observação imediata e à representação, mas um produto da elaboração de conceitos a partir da observação imediata e da representação.

Se MARX afirma que o pensamento caminha do simples ao complexo, do unilateral ao multilateral, do abstrato ao concreto, tendo sempre como pano de fundo a totalidade concreta, no entanto, observa que a realidade, enquanto movimento de totalidades concretas, não se processa necessariamente nesse mesmo sentido. Em outras palavras: a história da realidade objetiva não é a mera identificação com o processo de sua apreensão no pensamento.

MARX (1983:220) assim apresenta essa questão:

> Mas as categorias simples não terão também uma existência independente, de caratér histórico ou natural, anterior à das categorias mais concretas? Depende
> (grifos nossos)

Aqui há necessidade de se esclarecer alguns aspectos com relação à análise efetuada por MARX e a análise desenvolvida nesta dissertação.

A análise de MARX no "O Método da Economia Política" correlaciona três fatores: o pensamento cientificamente correto (do abstrato ao concreto, das partes para a explicitação do todo); a relação entre a história das relações econômicas e sua estrutura contemporânea (a MARX); a história da apreensão das relações econômicas pelo pensamento (a história do pensamento econômico).

Quando MARX formula e responde a pergunta acima citada ele compara dois processos: o pensamento lógico-científico e o desenvolvimento histórico da realidade objetiva. Afirma que o primeiro se dá do abstrato ao concreto, do simples ao complexo. Indaga se o segundo também ocorreria nessa ordem. Sua análise vai demonstrar que o desenvolvimento histórico da realidade objetiva não, necessariamente, caminha do abstrato ao concreto. É importante observar que a totalidade concreta, objetiva, estudada nesse momento por MARX é o conjunto das relações sociais objetivamente existentes entre os homens. Portanto, quando se refere ao processo histórico ele está analisando o processo histórico objetivo das relações sociais. Porém, em outro momento, MARX analisa a evolução histórica do pensamento econômico comparando-a com o método de ascensão do abstrato ao concreto.

Na análise dessa dissertação há de se entender uma relação entre dois processos: o processo de ascensão do abstrato ao concreto na geometria analítica atual e o processo de evolução histórica dos conceitos da geometria analítica. Aqui, o concreto de análise a ser apreendido pelo pensamento desde o início se diferencia do concreto de MARX. Aqui, o concreto é um concreto de pensamento (a figura geométrica mediatizada pelos processos algébricos e geométricos), enquanto que em MARX o concreto é a realidade social, a economia nas relações capitalistas.

Na análise da relação entre o processo de ascensão do abstrato ao concreto na geometria analítica atual e o processo de evolução histórica de seus conceitos indaga-se se a história do pensamento matemático (nota-se que não é a história da realidade objetiva como em MARX) engendra-se na mesma ordem do desenvolvimento lógico dos conceitos matemáticos, isto é, do simples ao complexo, das abstrações ao concreto. Mas a resposta, como em MARX, será "depende", pois, como será demonstrado, é incorreto afirmar que na história do pensamento matemático o pensamento evolua necessariamente do simples ao complexo, apesar de que no estudo lógico da matemática hoje seus conceitos caminharem das abstrações aos sistemas teóricos. Mas seria metodologicamente correto utilizar a relação entre o lógico e o histórico feita por MARX (onde ele compara o processo de reprodução do conjunto das relações sociais objetivas pelo pensamento com o processo histórico-ontológico de desenvolvimento dessas relações) na análise da relação entre a história da geometria analítica e a lógica da ascensão das abstrações ao concreto na geometria contemporânea ? A posição aqui adotada é a de que tal procedimento se justifica, dentre outras razões, pelas próprias alusões feitas por MARX ao desenvolvimento histórico do pensamento econômico, nas quais ele mostra que também na história do pensamento não necessariamente o processo de evolução caminha do abstrato ao concreto, do simples ao complexo.

Para exemplificar a curta, porém, fundamental resposta de MARX ("depende") ele inicialmente analisa as relações entre as categorias jurídicas de posse, família e propriedade. Afirma que HEGEL estava correto em iniciar sua filosofia do Direito pela categoria jurídica mais simples e abstrata: a categoria de posse. Afirma, porém, que a categoria de posse, apesar de ser mais simples, menos concreta que a categoria jurídica família não surgiu historicamente desta, ou seja, enquanto no plano do método científico o pensamento caminha do abstrato ao concreto, isso não significa que necessariamente as categorias mais simples e abstratas tenham tido uma existência histórica anterior às categorias mais concretas. MARX (1983:220) afirma:

> não existe posse antes de existir a família ou as relações entre senhores e escravos, que são relações muito mais concretas.

Quer dizer, a categoria abstrata não existe sem a categoria concreta da qual faz parte. Há de se compreender a anterioridade do concreto.

No entanto, MARX (1983:220) ainda afirma:

> Pelo contrário, seria correto dizer que existem famílias, comunidades de tribos, que estão ainda apenas no estágio da posse e não no da propriedade. Em relação à propriedade, a categoria mais simples surge pois como a relação de comunidades simples de famílias ou de tribos. Na sociedade num estágio superior, ela [a categoria de posse -JRBG] aparece como a relação mais simples de uma organização mais desenvolvida. Mas pressupõe sempre o substrato concreto que se exprime por uma relação de posse. Podemos imaginar um selvagem isolado que possua. Mas a posse não constitui neste caso uma relação jurídica. Não é exato que historicamente a posse evolua até a forma familiar. Pelo contrário, ela supõe sempre a existência dessa 'categoria jurídica mais concreta'. (grifos no original)

Em relação à posse, a família é uma categoria mais concreta, mais complexa. Mas a análise histórica demonstra que sem família não há posse, quer dizer, nesse caso, o complexo antecede o simples. Quanto à propriedade (categoria mais complexa que a posse na medida em que envolve maiores determinações), esta surge posteriormente à posse. Na relação propriedade-posse, o simples (a posse) antecede o complexo (a propriedade).

Raciocínio similar pode ser empregado quanto ao conceito simples de coordenadas geométricas em relação ao conceito de circunferência enquanto categoria mais complexa a ela. As coordenadas apesar de simples não antecedem historicamente a categoria complexa de circunferência porque no plano de evolução histórica dos conceitos matemáticos a circunferência surge antes das coordenadas. Portanto, no plano de conhecimento as coordenadas antecedem à circunferência, mas no plano histórico da evolução da matemática, nesse caso, o complexo (a circunferência) antecede ao simples (as coordenadas).

Prosseguindo em seu texto, MARX (1983:220) analisa a evolução histórica real das categorias enquanto relações objetivamente existentes e mostra que sob um outro determinado ângulo de análise da evolução histórica, o processo pode ser também entendido enquanto um processo que vai do simples ao complexo:

> Entretanto, não deixaria de ser menos verdadeiro que as categorias simples são a expressão de relações em que o concreto ainda não desenvolvido pôde realizar-se sem ter ainda dado origem à relação ou conexão mais complexa que encontra a sua expressão mental na categoria mais concreta; enquanto que o concreto mais desenvolvido deixa subsistir essa mesma categoria como uma relação subordinada. O dinheiro pode existir e existiu historicamente antes de existir o capital, os bancos, o trabalho assalariado, etc. Neste sentido, podemos dizer que a categoria mais simples pode exprimir relações dominantes de um todo menos desenvolvido ou, pelo contrário, relações subordinadas de um todo mais desenvolvido, relações que existiam já historicamente antes que o todo se desenvolvesse no sentido que encontra a sua expressão numa categoria mais concreta. Nesta medida, a evolução do pensamento abstrato, que se eleva do mais simples ao mais complexo, corresponderia ao processo histórico real. (grifos nossos)

Nesse caso, a trajetória histórica da realidade objetiva coincide com o processo de conhecimento que vai do abstrato ao concreto. O dinheiro (categoria simples) existiu anteriormente ao capital (categoria mais complexa).

No caso da geometria analítica, os conceitos de coordenadas e circunferência aqui apresentados, não se colocam como um exemplo dessa citação de MARX, muito pelo contrário. A evolução do pensamento se dá do abstrato ao concreto, do simples (as coordenadas) ao complexo (a circunferência) enquanto que no processo histórico, a circunferência desenvolve-se antes do conceito de coordenadas. É necessário pensar em um outro exemplo para o caso específico da citação acima enunciada por MARX na medida em que essa citação diz respeito a uma situação em que tanto o processo de conhecimento quanto o processo histórico se dêem do simples ao complexo.

É possível encontrar esse exemplo na própria geometria analítica. Basta considerar a relação entre o conceito de número irracional, uma categoria que é simples em relação à categoria mais complexa que ela , a de equação algébrica.

Antes de iniciar a análise desse exemplo em relação à citação de MARX, é necessário que se esclareça que os conceitos abordados para a justificativa desse exemplo não serão aqui devidamente definidos (o que alongaria em muito a discussão) na medida em que exige o conhecimento de uma série de dados que são apresentados nos sub-ítens 1.1 e 1.2 do capitulo II (respectivamente paginas 81 e 103). Cabe, portanto, ao leitor a tarefa de ir a esses sub-ítens colher os dados necessários para melhor entendimento do exemplo que é abaixo explicado.

O conceito de número irracional (categoria simples), enquanto representação de grandezas incomensuráveis na Grécia antiga, "são expressões de relações em que o concreto ainda não desenvolvido", isto é, a equação algébrica no sentido hodierno, "pode realizar-se" através da álgebra geométrica grega (os gregos resolviam equações como $(a + x).a = x^2$ e $x^2 = a.b$ através de um tratamento geométrico peculiar) "sem ter ainda dado origem a relação ou conexão mais complexa que encontra a sua expressão mental na categoria mais concreta" (a álgebra entendida nos seus conceitos hodiernos).

A equação algébrica hodierna ("o concreto mais desenvolvido") apresenta como uma de suas determinações, o conceito de números irracionais (portanto, como "categoria subordinada"). Entretanto, no que diz respeito ao conceito de número irracional no contexto histórico da Grécia antiga, esse conceito apresenta-se como categoria dominante em relação à equação algébrica (álgebra geométrica) na medida em que a álgebra geométrica grega reflete a saída possível adotada pelos gregos para o tratamento de grandezas incomensuráveis: a elaboração de procedimentos geométricos por construções de segmentos de retas, pois , tais segmentos poderiam representar grandezas comensuráveis ou incomensuráveis.

Nessa medida, o conceito de número irracional "pode exprimir relações dominantes de um todo menos desenvolvido (a álgebra geométrica em relação a álgebra hodierna)". Por outro lado, o mesmo conceito de número irracional pode exprimir "relações subordinadas de um todo mais desenvolvido (a álgebra hodierna), relações que existiam já historicamente (a álgebra enquanto álgebra geométrica) antes que o todo se desenvolvesse no sentido que encontra a sua expressão numa categoria mais concreta (a equação algébrica). Portanto, segundo esse exemplo, o processo de ascensão do abstrato ao concreto na geometria analítica, a partir das determinações mais simples às mais complexas corresponderia ao seu próprio desenvolvimento histórico.

Prosseguindo na análise do "Método da Economia Política", MARX utiliza o mesmo exemplo do dinheiro, para chegar a uma outra conclusão acerca da relação entre o desenvolvimento histórico e o método de ascensão do abstrato ao concreto (MARX,1983:220):

> Por outro lado, podemos dizer que há formas de sociedade muito desenvolvidas, mas a quem falta historicamente maturidade, e nas quais descobrimos as formas mais elevadas da economia, como, por exemplo, a cooperação, uma divisão do trabalho desenvolvida, etc., sem que exista qualquer forma de moeda: o Peru, por exemplo. Também entre os eslavos, o dinheiro e a troca que o condiciona não aparecem ou aparecem pouco no interior de cada comunidade, mas aparecem nas suas fronteiras, no comércio com outras comunidades....Esta categoria, no entanto tão simples, só aparece portanto historicamente com todo o seu vigor nos Estados mais desenvolvidos da sociedade. Não abre caminho através de todas as relações econômicas...Assim, apesar de historicamente a categoria mais simples poder ter existido antes da mais concreta, pode pertencer, no seu completo desenvolvimento - em compreensão e em extensão - precisamente a uma forma de sociedade complexa, enquanto que a categoria mais concreta se achava já completamente desenvolvida numa forma de sociedade mais atrasada.

Neste sentido, o concreto (complexo) agora antecederia o simples. A categoria mais simples desenvolve-se plenamente numa sociedade complexa enquanto que as categorias mais concretas podem ter se desenvolvido completamente de forma anterior às mais simples.

Se por um lado, as categorias mais simples que expressam as relações mais simples das formas mais simples da sociedade antecedem as categorias mais concretas que expressam relações mais complexas de formas mais complexas da sociedade, o processo histórico revela que mesmo que o mais simples preceda ao mais complexo, só no mais complexo o simples pode ser pensado de forma completa. Assim, se o processo histórico em determinados casos pode nascer do mais simples ao mais complexo, as categorias simples só podem ser realmente compreendidas na fase histórica mais desenvolvida, no complexo.

O exemplo dos conceitos de coordenadas e circunferência se situa nessa citação. A análise de MARX faz pensar em considerações a cerca da evolução histórica da geometria analítica. Conforme já dito, a geometria analítica surge a partir da interpretação algébrica dos procedimentos geométricos dos antigos geômetras. É claro que a geometria euclidiana era um campo de investigação matemática anterior ao surgimento da geometria analítica. É necessário pensar as categorias simples e complexas em função desse dado histórico. As coordenadas geométricas surgiram com APOLÔNIO de Perga (+-260-200 a.C). Nesse momento a categoria simples de coordenadas era categoria subordinada no quadro teórico da geometria euclidiana na medida em que a geometria euclidiana expressava-se por outros conceitos que não fossem as coordenadas. Já na etapa histórica seguinte, a da geometria analítica enquanto concreto mais desenvolvido, a geometria analítica deixa subsistir aquela categoria de coordenadas não mais como categoria subordinada, mas sim como uma de suas categorias dominantes, pois, através dela, a geometria analítica se expressa. Mas como tal, as coordenadas já existiram historicamente antes do pleno desenvolvimento da geometria analítica. Os primeiros indícios do conceito de coordenadas apareceram na Grécia Antiga, mas só num estágio superior do pensamento matemático esse conceito pôde ser totalmente compreendido. Nesse sentido, o processo histórico da evolução da geometria analítica (que aqui se deu do complexo ao simples, da circunferência às coordenadas), não corresponde ao processo de conhecimento da geometria analítica se dando do simples ao complexo (das coordenadas à circunferência).

Isso fica melhor compreendido ao se ler o que MARX escreve sobre a categoria econômica de trabalho. A categoria simples de trabalho enquanto trabalho em geral, trabalho abstrato, surgiu na economia política com Adam SMITH na medida em que a essência da riqueza deixou de ser considerada enquanto alguma forma particular de trabalho (trabalho agrícola, comercial, etc) e passou a ser considerada como sendo o trabalho humano em geral independente de suas particulariedades. Mas a categoria econômica trabalho só pode assumir essa forma abstrata e possuir um papel dominante na teoria econômica sobre a produção da riqueza quando o desenvolvimento objetivo da sociedade atingiu um nível tal no capitalismo onde a produção da riqueza já estava mais concentrada num tipo particular de trabalho (especialmente na agricultura). MARX (1983:222) afirma:

> A indiferença em relação a um gênero determinado de trabalho pressupõe a existência de uma totalidade muito desenvolvida de gêneros de trabalhos reais, dos quais nenhum é absolutamente predominante. Assim, as abstrações mais gerais só nascem, em resumo, com o desenvolvimento concreto mais rico, em que um carater aparece como comum a muitos, como comum a todos. Deixa de ser possível deste modo pensá-lo apenas sob uma forma particular. (grifos nossos)

No estágio histórico de maior desenvolvimento dessa totalidade concreta encontram-se categorias simples e gerais que explicam desenvolvimentos anteriores que, pelas suas limitações, não poderiam elaborar essas mesmas categorias com o mesmo potencial de investigação com que elas se apresentam no momento presente. Em outras palavras, na forma mais elaborada da expressão conceitual de um objeto encontra-se seu conhecimento histórico. Se não há uma identificação imediata entre o processo de desenvolvimento do conhecimento e o próprio desenvolvimento histórico da realidade objetiva, mesmo assim, o estágio mais desenvolvido do objeto permite captar os aspectos essenciais de seu desenvolvimento histórico. MARX (1983:223) afirma:

> A sociedade burguesa é a organização histórica da produção mais desenvolvida e mais variada que existe. Por este fato, as categorias que exprimem as relações desta sociedade e que permitem compreender a sua estrutura permitem ao mesmo tempo perceber a estrutura e as relações de produção de todas as formas de sociedades desaparecidas, sobre cujas ruínas e elementos ela se edificou, de que certos vestígios, parcialmente ainda não apagados, continuam a subsistir nela, e de que certos signos simples, desenvolvendo-se nela, se enriqueceram de toda sua significação. A anatomia do homem é a chave da anatomia do macaco. Nas espécies animais inferiores só se podem compreender os signos denunciadores de uma forma superior, quando essa forma superior é já conhecida. Da mesma forma a economia burguesa nos dá a chave da economia antiga, etc. Mas nunca à maneira dos economistas que suprimem todas as diferenças históricas e vêem em todas as formas de sociedade as da sociedade burguesa.

Quer dizer, na lógica de um objeto qualquer, no seu estágio mais desenvolvido encontram-se elementos que permitem compreender a própria evolução do objeto. Por exemplo, na estrutura conceitual hodierna da geometria analítica percebe-se uma etapa histórica da matemática em que os procedimentos algébricos unificaram-se aos procedimentos geométricos já formados. Por exemplo, a elipse (uma cônica) evoca, em sua definição, a propriedade de lugar geométrico (o conjunto de pontos no plano que se caracterizam por uma mesma propriedade), propriedade essa, que é quantificada pelo tratamento algébrico.

Assim, a investigação histórica é orientada para a análise da geometria euclidiana: a de se entender os procedimentos geométricos de construções das curvas aí desenvolvidos e, então, captar nesse processo já constituído, os gérmens do tratamento algébrico. Nota-se, portanto, que o lógico orienta o histórico, mas o histórico entendido em seus aspectos essenciais: não se foi analisar toda a história da geometria euclidiana, mas sim, buscar entender a justificativa do tratamento geométrico por construção, porque a álgebra surge nesse processo, em que momento e quais as limitações aí envolvidas.

Por outro lado, há de se tomar o cuidado da análise histórica, mesmo partindo de sua determinação última, poder levar ao equívoco de se perder a especificidade de cada momento histórico que se define como diferenciado entre um e outro.

MARX(1983:223) já havia advertido sobre esse fato:

> Se, portanto, é certo que as categorias da economia burguesa possuem uma certa verdade válida para todas as outras formas de sociedade, isto só pode ser admitido *cum grano salis* (com um grão de sal). Elas podem encerrar estas formas desenvolvidas, debilitadas, caricaturadas, etc., mas sempre com uma diferença essencial." (grifos no original)

A compreensão da lógica implícita às coordenadas ocorreu a partir de seus primeiros indícios com APOLÔNIO. No quadro histórico desse seu surgimento, é possível compreender a sua essência hoje. Conforme será melhor explicitado no capítulo II, APOLÔNIO toma as coordenadas enquanto meras referências para a construção geométrica seguindo o instrumental conceitual da álgebra geométrica grega. É essa idéia de referência que permite compreendê-las hoje. As coordenadas são referências para a construção geométrica da expressão algébrica. Mas essa compreensão se deu respeitando "a diferença essencial" do momento histórico vivido por APOLÔNIO. Trata-se, portanto, de um exemplo em que o histórico ajuda a compreender o lógico.

MARX (1983:225) conclui:

> Seria portanto impossível e errado classificar as categorias econômicas pela ordem em que foram historicamente determinantes. A sua ordem é pelo contrário determinada pelas relações que existem entre elas na sociedade burguesa moderna e é precisamente contrária ao que parece ser a sua ordem natural ou ao que corresponde à sua ordem de sucessão no decurso da evolução histórica. Não está em questão a relação que se estabeleceu historicamente entre as relações econômicas na sucessão das diferentes formas de sociedade. Muito menos a sua ordem de sucessão "na idéia" (Proudhon) (concepção nebulosa do movimento histórico). Trata-se da sua hierarquia no quadro da moderna sociedade burguesa.

Em outras palavras, a lógica do produto (o estágio mais desenvolvido da elaboração do conceito do objeto) revela a história de seu processo de elaboração. Mas o que é a lógica do produto senão a essência da relação abstrato-concreto ? Proceder à análise da lógica do produto é entender essa lógica enquanto processo, é concebê-la na sua historicidade intrínseca. Se a relação abstrato-concreto constitui a essência da lógica, a compreensão dessa lógica exige uma relação com sua história, seu processo evolutivo. Mas essa correlação entre a lógica da relação abstrato-concreto e a história dessa relação não é imediata, como foi demonstrado aqui. Há de se selecionar, depurar na história, os traços, os aspectos essenciais desse encadeamento lógico que determinou a forma de ser da lógica do produto enquanto relação abstrato-concreto. A lógica do produto, portanto, orienta a captação dos aspectos essenciais ao longo de sua historicidade, bem como, orienta a elaboração teórica de uma seqüência lógica no desenvolvimento histórico de forma que nessa seqüência haja uma melhor compreensão de sua lógica (DUARTE,1987:27).

Seguindo o raciocínio efetuado por DUARTE (1987:27), a lógica do produto orienta a captação dos aspectos essenciais ao longo de sua historicidade porque ela é a chave para compreensão das etapas anteriores mas, desde que se tome o cuidado de respeitar a especificidade histórica de cada momento como havia advertido MARX (1983:223):

> a economia burguesa nos dá a chave da economia antiga, etc. Mas nunca à maneira dos economistas que suprimem todas as diferenças históricas e vêem em todas as formas de sociedade as da sociedade burguesa.

Mas a lógica do produto também orienta a elaboração de uma seqüência lógica do seu desenvolvimento histórico. Segundo DUARTE (1987:29), para entender isso é necessário fazer uma distinção entre seqüência cronológica das etapas essenciais e seqüência lógico-histórica dessas etapas. Afirma:

> A seqüência cronológica seria aquela pela qual essas etapas se sucederam na história do objeto sendo que a seqüência lógico-histórica seria aquela que o pensamento elabora teoricamente segundo os próprios critérios lógicos do desenvolvimento histórico. Em outras palavras: o desenvolvimento histórico, além de existirem fatos que são secundários para a compreensão do objeto, também existem os desvios, os ziguezagues, os retrocessos, os acidentes de percurso, que fazem com que a seqüência das etapas essenciais não tenham sido, na história do objeto, aquela seqüência que seria mais lógica, do ponto de vista da própria lógica do processo.

Apesar da lógica do produto revelar e esconder tanto a seqüência cronológica quanto a seqüência lógico-histórica, ela é a chave para compreensão da lógica do processo, o que então permite que seja possível elaborar teoricamente a seqüência lógico-histórica necessária (DUARTE,1987:30).

Em suma, essa é a tarefa proposta para o capítulo seguinte no qual procurou-se, através dessa relação metodológica entre o lógico e o histórico, aprofundar a compreensão da relação entre o abstrato e o concreto no processo de elaboração dos conceitos da geometria analítica.

CAPITULO II : O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA RELAÇÃO ENTRE O ABSTRATO E O CONCRETO NA GEOMETRIA ANALÍTICA.

II.1-Introdução

A geometria analítica foi inicialmente elaborada por René DESCARTES (1596-1650) e FERMAT (1601-1665). Em DESCARTES, as primeiras idéias da geometria analítica foram apresentadas na sua obra "Geometria", um apêndice do seu livro "Discurso do Método - Para Bem Conduzir a Razão e Buscar a Verdade nas Ciências" publicado em 1637. Já em FERMAT essas idéias estão presentes na sua obra "Ad locus planos et solidos isagoge" ("Introdução aos Lugares Planos e Sólidos") publicada somente após sua morte.

Os conceitos presentes nessas obras foram elaborados a partir da utilização dos conceitos algébricos desenvolvidos nessa época na análise dos resultados da geometria euclidiana. Essa utilização determinou uma unificação entre os processos algébricos e geométricos até então existentes, propiciando um avanço para compreensão das próprias especificidades presentes na álgebra e na geometria.

Até então, havia processos de construções geométricas que, apesar de bastante desenvolvidos, eram entretanto, heterogêneos, isto é, cada matemático utilizava um processo próprio.

A geometria analítica surge como um recurso inovador porque passou a utilizar processos algébricos para homogenização dos procedimentos geométricos, através de uma reorientação com base na similariedade de idéias de cada problema.

Se, por um lado, na geometria analítica há o esclarecimento das construções geométricas pelo enfoque algébrico, por outro lado, as próprias expressões algébricas através de suas equações, passaram a ser melhor interpretadas pelo auxilio de suas representações geométricas construídas pelos conceitos reelaborados pela geometria analítica.

A compreensão desse processo histórico no qual as abstrações geométricas assumiram o papel de mediadoras na compreensão sintética da figura geométrica evidencia que a análise do processo de evolução histórica dos conceitos da geometria analítica pode contribuir decisivamente para a compreensão da relação abstrato-concreto presente nos conceitos hodiernos dessa área do conhecimento matemático.

Na Grécia antiga, as propriedades intrínsecas da figura geométrica eram analisadas através dos conceitos da geometria euclidiana que, portanto, desempenhavam o papel de abstrações mediadoras na apreensão da figura enquanto concreto síntese.

A riqueza da geometria grega permitiu o surgimento dos primeiros trabalhos algébricos. Mas a geometria euclidiana, se, por um lado, permitiu o surgimento dos primeiros resultados algébricos, por outro lado, logo se revelaria cerceadora do pleno desenvolvimento algébrico.

Ocorre que, conforme será melhor esmiuçado, a base numérica da matemática grega não era flexível o bastante para a elaboração de símbolos algébricos próprios. Mas mesmo com essa limitação, a geometria grega permitiu o surgimento algébrico, só que de forma atrelada à representação geométrica. Portanto, nesse estágio da relação abstrato-concreto, as abstrações algébricas apresentavam-se muito atreladas ao concreto empírico dado pelas figuras geométricas.

Mas o atrelamento à figura geométrica, se antes era motivo de avanço das expressões algébricas, com o tempo revelou-se entrave para seu desenvolvimento. Tornou-se indispensável para o pleno aprimoramento algébrico novas condições que não fossem as que fundamentavam a geometria euclidiana. Essas condições foram dadas pela matemática hindu e árabe.

O que se vê, com a colaboração desses povos, é um impulso maior para o desenvolvimento algébrico, apesar de uma fase inicial muito arraigada a influência grega, tanto que os resultados algébricos obtidos eram confirmados em sua veracidade lógica pelos procedimentos geométricos gregos. Mas aos poucos a álgebra foi se firmando em sua autonomia. No entanto, a construção dessa autonomia foi se realizando na sua dicotomia em relação a geometria grega, isto é, os processos algébricos e euclidianos foram sendo interpretados de forma dissociada.

É muito interessante perceber que a autonomia dos procedimentos algébricos em relação aos geométricos é o aspecto positivo do desenvolvimento histórico da geometria. No entanto, há de se entender também o aspecto negativo desse desenvolvimento, qual seja, a dicotomia entre álgebra e geometria decorrente da geometria enquanto critério de validade lógica dos conceitos algébricos. Mas o processo histórico demonstra que a geometria analítica superou essa dicotomia sem suprimir a autonomia.

A autonomia algébrica vai encontrar seu limite máximo, quando se transforma em instrumento próprio de investigação dos próprios procedimentos geométricos que, historicamente, foram sua origem. É o momento da síntese entre álgebra e geometria com o surgimento dos primeiros conceitos da geometria analítica com DESCARTES e FERMAT. Com a geometria analítica, as propriedades geométricas das figuras passaram a ser profundamente esmiuçadas pelo auxílio da análise algébrica sem que essas expressões algébricas se limitassem às figuras geométricas que eram inicialmente o seu instrumento matemático de elaboração. Da mesma forma, com a geometria analítica os processos algébricos passaram a ser melhor compreendidos mediante sua representação geométrica.

Assim, percebe-se que no desenvolvimento histórico dos conceitos da geometria analítica os processos algébricos acabaram sendo instrumento para compreensão das figuras geométricas que lhe foram inicialmente ponto de partida e momentaneamente entrave para seu desenvolvimento.

Tais fatos atestam o processo dinâmico da relação entre o abstrato (os conceitos algébricos e euclidianos) e o concreto (as figuras geométricas) no desenvolvimento da geometria analítica. Procurando esclarecer os aspectos históricos essenciais desse desenvolvimento para melhor compreender o processo de elaboração dos conceitos da geometria analítica, considerou-se, em função dos fatos acima apontados, a necessidade de se esmiuçar três momentos históricos:

O primeiro momento intitula-se "Da empiria das figuras geométricas para elaboração das primeiras abstrações algébricas". Diz respeito à álgebra na matemática grega. Mais especificamente, refere-se a caracterização dos elementos históricos que determinaram o surgimento dos primeiros resultados algébricos, suas limitações daí decorrentes por estarem estritamente vinculadas às figuras geométricas. O termo "empiria" aqui adotado refere-se ao ponto de partida do processo de ascensão do abstrato ao concreto no desenvolvimento histórico da geometria analítica. Como tal, (é bom sempre lembrar), a análise abstrato-concreto não determina na relação entre seus pólos, estágios fixos do processo de conhecimento. No momento histórico em que se inicia essa análise, isto é, a matemática na Grécia antiga, as figuras geométricas sistematizadas pela análise euclidiana serão o ponto de partida para as primeiras mediações algébricas para apreensão das figuras geométricas em toda sua multiplicidade de determinações. Nesse sentido, as figuras geométricas revelam-se como sendo o momento empírico necessário para os primeiros conceitos algébricos.

No entanto, para melhor compreensão desse momento do processo de elaboração da geometria analítica, revelou-se ser necessário apresentar alguns subsídios. Tais subsídios aparecem na forma de três sub-ítens abaixo relacionados:

II.2.1- As limitações da representação numérica grega no tratamento de grandezas incomensuráveis e suas conseqüências para o posterior desenvolvimento algébrico;

O objetivo desse sub-item é entender como o não reconhecimento dos números irracionais impôs aos gregos a adoção de uma saída paliativa para o tratamento de grandezas incomensuráveis (na medida em que não deram uma solução numérica para esses números) determinando, assim, uma ênfase geométrica na matemática grega.

II.2.2- A álgebra geométrica grega;

Nesse sub-item analisa-se a complexidade atingida pela matemática grega apesar de suas limitações lógico-estruturais. O desenvolvimento de uma álgebra com feições totalmente geométricas vai determinar um impulso cada vez maior a processos heterogêneos de construções geométricas, bem como, determinar a impossibilidade de se elaborar instrumentos algébricos próprios desvinculados dessa empiria geométrica.

II.2.3- A noção de coordenadas em APOLÔNIO e MENAECMO.

A importância desse sub-item está na compreensão dos primeiros indícios da noção de coordenadas geométricas. A historicização desse momento revela o gérmen de um conceito que é o instrumento-síntese da geometria analítica hodierna e que foi decisivo para DESCARTES elaborar sua "Geometria".

Com esse terceiro sub-item fecha-se a análise do primeiro momento acima descrito.

O segundo momento intitula-se "A gênese dos procedimentos algébricos: do atrelamento à figura ao seu processo de autonomia pela dicotomia em relação aos procedimentos geométricos".

Esse segundo momento da historicização da relação abstrato-concreto na geometria analítica centraliza-se na questão da elaboração algébrica. Também apresenta três sub-ítens abaixo sistematizados:

II.3.1- Os trabalhos aritméticos e algébricos presentes entre os gregos: dos "Elementos" de EUCLIDES aos trabalhos de HERON de Alexandria, NICÔMACO de Gerasa e DIOFANTO;

Apresenta uma análise dos trabalhos aritméticos na fase euclidiana em função das limitações aí existentes, bem como a relativa mudança ocorrida com o surgimento dos trabalhos de HERON, NICÔMACO e DIOFANTO. Tais trabalhos revelam os gérmens da autonomia algébrica em relação à geometria.

II.3.2- A contribuição dos trabalhos hindus e árabes;

O objetivo desse sub-item é mostrar através dos trabalhos árabes e hindus, a progressiva tentativa de elaboração das abstrações algébricas se dando não mais de forma intrinsecamente relacionada à empiria da figura geométrica como na época grega, tanto que nesse momento, a figura geométrica aparece posteriormente ao desenvolvimento algébrico como critério de validade deste. Esse processo de autonomia algébrica não se deu de forma linear porque o critério geométrico de validade das proposições algébricas se fez presente, mas de forma dissociada. Daí a dicotomia entre os processos algébricos e geométricos até o surgimento da geometria analítica.

II.3.3-A álgebra na Europa: as traduções das obras árabes e hindus, o aprimoramento da simbologia algébrica.

Aqui, analisa-se o amadurecimento dos processos algébricos através do desenvolvimento de sua simbologia, condição fundamental para sua crescente autonomia, determinando assim, as condições necessárias para o movimento de síntese entre os processos algébricos e geométricos.

Finalmente, o terceiro e último momento, esmiuça o surgimento da geometria analítica através da análise dos trabalhos de DESCARTES e FERMAT. É o momento da síntese entre álgebra e geometria . Por esse motivo, intitula-se "A geometria analítica em DESCARTES e FERMAT: o momento da síntese entre os processos algébricos e geométricos".

Antes de proceder a análise desses momentos, é importante esclarecer que para a historicização da relação abstrato-concreto na geometria analítica, não foi necessária uma investigação da etapa histórica posterior a DESCARTES e FERMAT. O que era necessário ser destacado era exatamente o movimento não linear ao longo da história do desenvolvimento dos processos algébricos e geométricos até sua síntese. Mas é inegável que essa síntese vai mais avante.

No entanto, o ponto de referência que orientou a investigação histórica até DESCARTES e FERMAT foi o processo pedagógico. Isso significa que os três momentos acima explicitados fornecem os elementos necessários para a compreensão e superação da dicotomia entre álgebra e geometria presentes na aleatoriedade dos procedimentos de ensino da geometria analítica. Tendo em vista esse objetivo, considerou-se desnecessária a análise histórica da evolução da geometria analítica posterior a DESCARTES e FERMAT.

Dados os devidos esclarecimentos, é possível agora proceder a análise de cada um dos três momentos aqui selecionados.

II.2- Da empiria das figuras geométricas para elaboração das primeiras abstrações algébricas.

II.2.1- As limitações da representação numérica grega no tratamento de grandezas incomensuráveis e suas conseqüências para o posterior desenvolvimento algébrico;

A matemática grega na antiguidade praticamente não deixou nenhuma documentação concreta sobre sua evolução. Tudo que se sabe hoje da matemática grega provém de traduções medievais de originais gregos que se perderam ao longo do tempo (AABOE,1984:45).

É sabido hoje que a matemática grega é dedutiva, isto é, caracteriza-se pelo rigor lógico na busca de demonstrações.

Segundo AABOE (1984:47) foi TALES de Mileto, a partir do século VI a.C. após suas viagens pelo Egito, quem primeiro deu esse caráter dedutivo à matemática grega. Porém, hoje, muitos historiadores apontam como sendo os conhecimentos matemáticos trazidos por TALES oriundos na verdade dos babilônios, pois, os conhecimentos matemáticos destes já eram muitos mais desenvolvidos que aqueles dos egípcios.

Após TALES, surgiria PITÁGORAS de Samos (+ 530a.C.), considerado por muitos historiadores como o maior colaborador para o desenvolvimento da matemática grega.

PITÁGORAS e sua escola filosófica (que geraria inúmeros seguidores) determinou uma concepção de matemática mesclada em religião e filosofia enquanto base moral para a conduta. Através de seus pressupostos filosóficos, os números adquiriram destaque, sendo mesmo considerados como modelo para compreensão da realidade e, como tal, mereceram um estudo de suas propriedades.

Segundo CARAÇA (1974:72) este destaque dado aos números era devido ao fato dos pitagóricos interpretarem as coisas materiais como que constituídas de corpúsculos de extensão não nula ,as chamadas mónadas. Para eles, cada corpo era compreendido como um aglomerado de mónadas e cada mónada, equivalia a uma unidade numérica. Um determinado corpo material se constituia assim, num conjunto dessas unidades numéricas, ao qual se dava uma identificação numérica.

Uma extensão desta aplicação foi a conotação moral dada aos números adjetivando-os em virtudes.

Quanto a geometria pitagórica, esta não poderia deixar de estar atrelada aos números pitagóricos. A partir da relação entre mónada e unidade numérica, os números ganharam uma representação espacial pelo arranjo de unidades vistas como arranjo de pontos, denominados números figurativos.

CARAÇA(1974:70) apresenta dois exemplos de números figurativos, os números triangulares e os quadrados (figura 01).

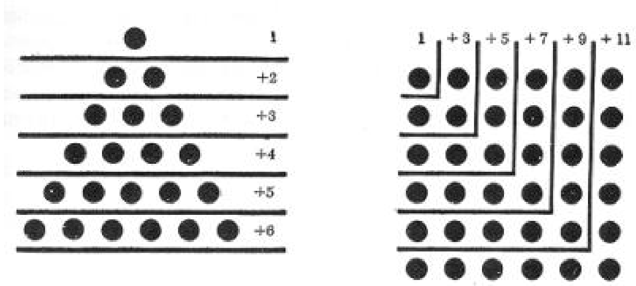


fig.01

É importante destacar que a geometria pitagórica foi desenvolvida em função dos números, e como tal, se transformou em mais um mecanismo para análise numérica. Tanto foi assim, que a geometria pitagórica nada mais era que uma versão totalmente quantitativa, em que a forma cedia espaço para a quantidade e, como tal, se moldava à necessidade precípua de representar a quantidade.

Priorizando o quantitativo, os pitagóricos aprofundaram o estudo dos números elaborando a chamada Teoria das Proporcionais.

Essa teoria formalizava a relação entre os números, relação esta expressa pelas razões. Uma razão expressava a relação entre dois números através de seu quociente. Porém, o quociente desses números não era visto como frações, isto é, como um único número, mas tão somente pela relação entre o quociente deles. Por exemplo, 1/3 que hoje representa um número (o "um terço"), era compreendido pelos gregos como uma relação entre o um e o três.

O fato de não considerar as frações como no sentido hodierno se dava em decorrência da limitada conceituação numérica grega, já que esta apresentava uma certa inflexibilidade na representação numérica devido a rigidez dos signos ai utilizados.

Nesse momento é preciso que seja apresentado alguns dados para se entender o conceito de número e sua relação para o desenvolvimento da geometria.

Na antiguidade os gregos elaboraram dois tipos de notação numérica: a ática e a jônia.

A notação ática era a mais antiga. Era um sistema decimal aditivo com signos especiais para os números 5, 50, 500, 5000, 50000, como também para a dezena, a centena, o milhar, a dezena de milhar (IFRAH, 1984:183).

Mais tarde, possivelmente por volta do século V a.C (ou VIII século a.C.), tal sistema de notação passou a ser substituído pelo sistema jônio ou alfabético (cf. BOYER, 1974:43).

O sistema jônio baseava-se por uma associação entre letras do alfabeto grego e os números naturais. Eram as 24 letras do seu alfabeto mais três signos do alfabeto de origem fenícia divididos em três classes de unidades segundo a base decimal. Em IFRAH (1984:218) encontra-se uma exposição do sistema jônio que é reproduzido abaixo (figura 02):

UNIDADES				DEZENAS				CENTENAS			
Α	α	alfa	1	Ι	ι	iota	10	Ρ	ρ	rô	100
Β	β	beta	2	Κ	κ	capa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gama	3	Λ	λ	lambda	30	Τ	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	Μ	μ	mi	40	Υ	υ	ípsilon	400
Ε	ε	épsilon	5	Ν	ν	ni	50	Φ	φ	phi	500
Ϛ	ϛ	dígamo	6	Ξ	ξ	csi	60	Χ	χ	khi	600
Ζ	ζ	dzeta	7	Ο	ο	ômicron	70	Ψ	ψ	psi	700
Η	η	eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	ômega	800
Θ	θ	teta	9	Ϙ	ϙ	qoppa	90	Ϡ	ϡ	san	900

fig.02

Para os nove múltiplos de mil os gregos tomavam as nove letras da unidade representando-as precedidas de um acento no canto superior ou inferior. Por exemplo, 2000 era 'β ou 'B , podendo também ser , β ou ,B .

Quanto às frações, os gregos, inicialmente influenciados pelos egípcios, consideravam apenas as frações unitárias. Sua notação ocorria pela representação do denominador com um acento colocado posteriormente a sua escrita. Assim, por exemplo 1/64 era ξδ' o que diferenciava-se do número 64, cujo símbolo era ξδ (BOYER,1974:44).

Posteriormente, os gregos passariam a considerar todos os tipos de frações inclusive as sexagesimais. Porém, conforme já dito, as frações não eram vistas como números em si, mas como uma relação entre dois números naturais tão somente.

A falta de uma flexibilidade na representação numérica impediu que os gregos avançassem no manuseio de técnicas de cálculo para elaboração de algoritmos. Possivelmente, restringiram-se apenas a efetuar suas operações aritméticas por meios de instrumentos concretos que eram os ábacos. Desta forma, não houveram condições necessárias para que os gregos elaborassem uma estrutura numérica para além dos números naturais e frações enquanto relação entre dois números naturais.

A interpretação das frações enquanto relações entre números naturais já era adotada por TALES e PITÁGORAS.

PITÁGORAS, pela sua admiração aos números desenvolve a chamada Teoria das Proporcionais, isto é, passa a caracterizar as diversas relações presentes nas razões entre números inteiros.

É assim que já nesta época, era do conhecimento dos pitagóricos as médias aritméticas, geométricas e harmônicas. Dados m e n enquanto números naturais, com m menor que n, tem-se na notação atual o seguinte:

média aritmética: (m+n)/2

média geométrica: $\sqrt{mn}$

média harmônica: 2mn/(m+n)

BOYER (1978:41) afirma que o estudo das Proporcionais se desenvolveu até chegar ao conhecimento de mais sete médias:

Sendo b a media de a e c com a menor que c tem-se

(b - a)/ (c - b) = c/a (b - a)/(c - b) = b/a

(b - a)/ (c - b) = c/b (c - a)/(b - a) = c/a

(c - a)/ (b - a) = c/a (c - a)/ (b - a) = b/a

(c - a)/ (c - b) = b/a

Toda esse desenvolvimento da Teoria das Proporcionais provocou sua aplicabilidade à geometria. Assim, desenvolveu-se um estudo das figuras através da comparação de suas formas mediante a comparação entre seus elementos comuns expressos por razões proporcionais. É a chamada Teoria da Semelhança. As figuras são ditas semelhantes se possuirem ângulos iguais entre si e os lados compreendidos entre esses ângulos proporcionais.

Observe que com o advento da Teoria de Semelhança a geometria pitagórica passa a ir além da mera representação numérica pelos números figurativos. Aqui, graças a Teoria das Proporcionais, a geometria ganha um grau maior de complexidade, passando a caracterizar suas formas, comparando-as pela sua expressão numérica, isto é, suas medidas.

Assim, todo o estudo das figuras se deu pela caracterização das condições mínimas necessárias para haver semelhança, isto é, a relação de proporcionalidade existente entre os lados e entre os ângulos congruentes correspondentes a esses lados.

Por exemplo, dados os triângulos ABC e DEF representados na figura 03 abaixo, eles são semelhantes porque

Â = D , B = E , C = F e AB/DE = BC/EF = AC/DF

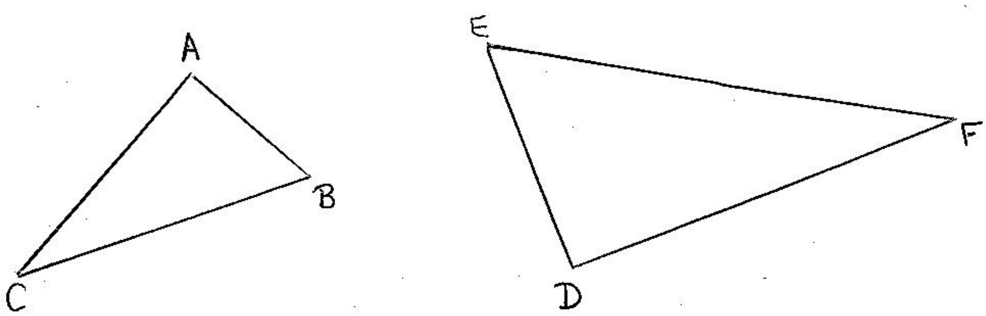


figura 03

Porém, observe-se que esta comparação era possível sob condições de comensurabilidade, isto é, os elementos envolvidos (os lados das figuras) eram passíveis de comparação porque possuíam medidas exatas.

O conceito de comensurabilidade significa o seguinte: dados dois segmentos quaisquer AB e CD, estes segmentos são comensuráveis se existir um segmento m contido um número inteiro de vezes m em AB e outro número inteiro de vezes h em CD. Assim (fig.04):

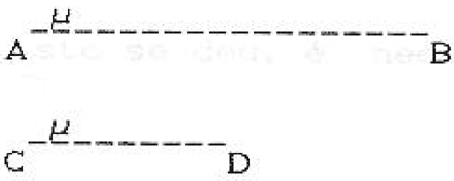


fig. 04

$$AB = m.\mu \quad e \quad CD = n.\mu$$

Sendo assim, a razão entre os segmentos AB e CD, isto é, AB/CD determina uma fração m/n que é necessariamente reduzida a sua forma irredutível (sem fatores comuns, isto é, por números primos entre si).

Pode-se afirmar que o segmento AB está para o segmento CD na razão m/n se existir um segmento μ tal que AB = mμ e CD = n. μ. Nestas condições, AB e CA são ditos segmentos comensuráveis.

A comensurabilidade presente na Teoria de Semelhança se deu em decorrência da restrição aos números naturais tão somente.

Restrito ao campo numérico dos naturais, a Teoria da Semelhança necessariamente apresentou-se sob tal campo, e por isso, sob a comparação de medidas de segmentos exatas. Além disso, a semelhança das figuras também se adequaria a teoria filosófica das mónadas a partir do momento em que os corpos eram considerados como formados por determinadas quantidades de mónadas que nada mais significaria do que uma quantidade numérica finita.

Porém, não tardaria ao universo matemático pitagórico atrelado ao conceito de comensurabilidade se tornar incapacitado de interpretar situações geométricas que envolvessem segmentos não comensuráveis. E de fato, isto aconteceu. Mas, para entender muito bem como isto se deu, é necessário um esclarecimento um tanto longo.

O problema que viria a mostrar a incapacidade pitagórica para análises geométricas que envolvessem segmentos não comensuráveis é por demais simples. Considerando um triângulo retângulo isósceles qualquer, representado pelos vértices ABC onde AB = CD, exigia-se determinar a medida da hipotenusa AC em função do cateto AB. É importante observar que este problema pode ser também interpretado como a determinação da diagonal AC do quadrado ABCD em função do lado (figura 05).

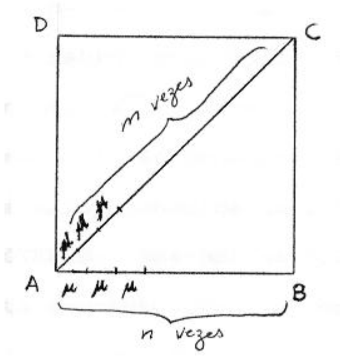


figura05

Esta situação exigia a expressão da proporcionalidade entre AC e AB. Dentro do conceito pitagórico esperava-se que AC e AB fossem comensuráveis, isto é, existiria um segmento unitário μ tal que AC = mμ, AB = nμ de tal forma que AC/AB = m/n ou AC (m/n).AB.

Porém, aplicando o conhecido Teorema de PITÁGORAS obtém-se

$$AC^2 = AB^2 + CB^2$$

Como trata-se de um triângulo isósceles, AB = CB logo

$$AC^2 = AB^2 + AB^2$$

$$AC^2 = 2AB^2$$

Como fora suposto que AC = (m/n). AB, elevando ao quadrado obtém-se

$$AC^2 = (m/n)^2 .AB^2$$

Comparando com $AC^2 = 2AB^2$ tem-se $(m/n) = 2$ ou $m/n = \sqrt{2}$

A dificuldade pitagórica residia na determinação de dois números naturais m e n tais que $m/n = \sqrt{2}$, determinação essa impossível. Hoje é sabido que não existe m, n números inteiros de tal forma que m/n seja $\sqrt{2}$. Números como $\sqrt{2}$ são impossíveis de expressar na forma m/n; são denominados números incomensuráveis.

A prova mais conhecida da incomensurabilidade de $\sqrt{2}$ é dada por ARISTÓTELES (384-322 a.C.) e muitos historiadores discutiram se esta demonstração já não seria conhecida na época de PITÁGORAS.

Esta demonstração utiliza as relações existentes entre números pares e ímpares, fato este muito conhecido na época pitagórica o que justifica a suposição do conhecimento desta demonstração pelo próprio PITÁGORAS.

A demonstração se dá por absurdo, isto é supõem-se AB e AC comensuráveis e o procedimento lógico no transcorrer da demonstração leva a uma conclusão contrária a suposição.

Supondo AB e AC comensuráveis então

$AC/AB = m/n$ sendo m e n números inteiros sem fatores comuns (são primos entre si).

Tinha-se do Teorema de PITÁGORAS

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Mas AB = BC pois são lados do quadrado e, portanto tem a mesma medida. Logo

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = AB^2 + AB^2$$

$$AC^2 = 2AB^2$$

$$AC^2/ AB^2 = 2 \quad (AC / AB)^2 = 2$$

Mas foi suposto que $AC/AB = m/n$ daí

$$(AC / AB)^2= (m /n)^2 = 2$$

$$m^2 /n^2 = 2$$

$$m^2 = 2n^2$$

Se $m^2 = 2n^2$,conclui-se que m^2 é par. Daí m é par, já que o quadrado de um número par é par. Note que se fosse um número ímpar, seu valor ao quadrado daria ímpar. Logo, necessariamente m é par.

Se m é par, lembre-se que m/n é uma fração já sem fatores comuns (primos entre si). Logo se m é par, então n tem que ser necessariamente ímpar para que seja de fato uma fração sem fatores comuns.

Mas se m é par, então m é da forma $m = 2s$.

Por outro lado, $m^2 = (2s)^2 = 4s^2$. Mas antes tinha-se $m^2 = 2n^2$, logo $4s^2 = 2n^2$

De $4s^2 = 2n^2$ tem-se $(4/2)s^2 = n^2$, isto é, $n^2 = 2s^2$ o que conclui-se ser n^2 par e necessariamente n ser par.

Mas acima n deveria ser necessariamente ímpar. Como não existe um número que é par e ímpar ao mesmo tempo conclui-se que a razão m/n com m e n sem fatores comuns é impossível. Logo $AC/AB = m/n$ é impossível com m e n inteiros.

A Teoria das Proporcionais não deu conta desse problema, o que fez com que a incomensurabilidade inviabilizasse a Teoria da Semelhança na análise das construções geométricas. Explicando melhor:

A definição de figuras semelhantes colocava, como possível, o conceito de proporcionalidade entre os segmentos, mediante a comensurabilidade entre eles. Bastaria por exemplo supor a proporcionalidade entre dois lados de um triângulo qualquer como sendo a proporcionalidade entre a diagonal de um quadrado e seu lado para que a Teoria de Semelhança passasse a não valer.

De fato, utilizando-se do exemplo apresentado por AABOE (1984:52), num triângulo ABC traça-se uma paralela ao lado BC interceptando os outros dois lados em pontos B' e C' (figura 06).

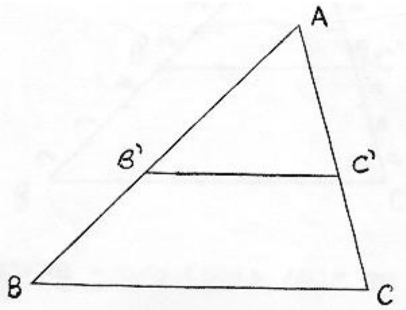


fig.06

Com isto ficam determinados os triângulos ABC e AB'C'. Afirma-se que estes triângulos são semelhantes.

De fato, para que esses triângulos sejam semelhantes é necessário que os ângulos correspondentes sejam iguais e os lados correspondentes a estes ângulos sejam proporcionais.

O traçado da paralela B'C' a BC determina ângulos B' e C' correspondentes a B e C respectivamente. A condição de paralelismo determina que esses ângulos sejam congruentes. Logo B = B' e C = C'

Agora é necessário provar que os lados correspondentes a estes ângulos sejam proporcionais, isto é,

$$AB'/AB = AC'/AC = B'C'/BC$$

Supondo o segmento de reta AB dividido em m partes inteiras de tal forma que m caiba p vezes em AB' e q vezes em AB, sendo p e q números inteiros (figura 07).

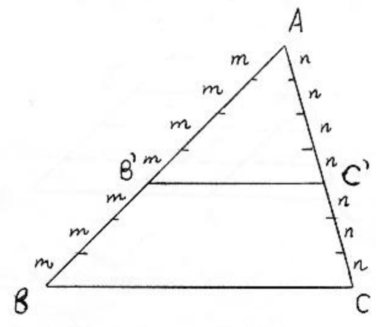


fig.07

Logo AB'/AB = p/q (pois AB'= q.m e daí AB'/AB = p.m/q.m)

Supondo n um outro segmento de reta de tal forma que n caiba p' vezes em AC' e q' vezes em AC. Logo AC'/AC = p'/q'

Como é necessário provar que AB'/AB = AC'/AC = B'C'/BC tem-se que a igualdade entre AB'/AB e AC'/AC levará a conclusão que p/q = p'/q' o que significará um mesmo número de divisões inteiras em AB' e AC' e também em AB e AC.

Observando o traçado do triângulo ABC pode-se ver B'C' e BC como paralelas determinando nas transversais AB e AC, duas sucessões de segmentos AB', AB e AC' e AC. Segundo TALES, estes segmentos sob estas condições são proporcionais. Daí

AB'/AB = AC'/AC (I)

Agora pelo ponto C' constrói-se uma paralela C'R a AB, e utilizando novamente TALES tem-se (figura 08).

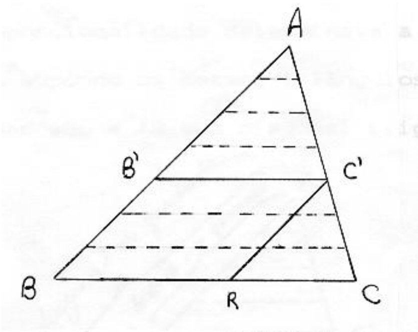


fig.08

AC'/AC = BR/BC

Mas BR = B'C' pois B'C'RB é um paralelogramo. Logo

AC'/AC = B'C'/BC (II)

Analisando as afirmações (I) e (II) conclui-se

AB' / AB = AC' / AC (I)

AC' / AC = B'C' / BC (II)

====> AB'/ AB = AC'/ AC = B'C'/ BC

O que quer dizer que os lados correspondentes aos ângulos correspondentes B = B' e C' = C são proporcionais.

Com isto conclui-se que os triângulos ABC e AB'C' são semelhantes.

Da demonstração, observe que toda sua construção baseou-se em lados comensuráveis. No caso existia μ, o segmento de reta unitário de tal forma que $AB = q\mu$, $AB' = p\mu$ com q, p inteiros. A proporcionalidade determinava a razão $AB'/ AB = p /q$

Agora supondo os mesmos triângulos ABC e AB'C' sendo AB' o lado de um quadrado e AB sua diagonal (figura 09).

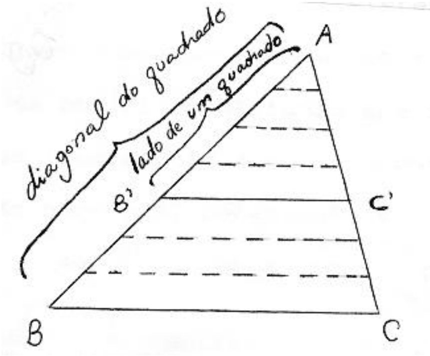


figura 09

Nestas condições, conforme já visto, não existe p e q inteiros que representam a razão entre a diagonal e o lado do quadrado, ou seja, $AB'/AB = p/q$ não existe para p e q inteiros.

Conclui-se que a Teoria da Semelhança torna-se incompleta.

Já aqui, nota-se que a Teoria de Semelhança não dá conta de interpretar figuras geométricas em que envolvam segmentos incomensuráveis. O fato de não dar conta, deve-se aos limitados recursos presentes no sistema numérico grego que lhes impediam aprofundar o estudo dos números irracionais. Não desenvolveram um símbolo para tais números; chegando mesmo a não considerá-los como números em si mesmos. Essa imaleabilidade computacional grega, contrasta-se inclusive à babilônia, tanto que estes obtiveram em seus cálculos aproximações excelentes de $\sqrt{2}$ (BOYER,1978:21).

O maior desenvolvimento matemático babilônio é devido ao fato deles adotarem um sistema numérico sexagesimal praticamente posicional, inclusive estendendo tal sistema às frações, o que permitiu desenvolver complexos processos algoritmos.

O sistema numérico babilônio era praticamente posicional porque eles davam importância à posição que o algorismo ocupava na sua representação numérica, porém, não tinham um símbolo próprio para o zero, daí ser chamado de praticamente posicional (BOYER,1974:20).

Mas a riqueza da matemática grega se nutre dentro de suas possibilidades. Daí o desenvolvimento de sua geometria. Só que tal desenvolvimento não impediu que o conceito de incomensurabilidade acabasse manifestando-se dentro de seus moldes geométricos. Haveriam os pitagóricos de contornar aquilo que por eles foi considerado um "escândalo".

A solução paliativa dada, foi evitar o aparecimento desses números em seus estudos. Sucessores de PITÁGORAS viriam a elaborar trabalhos de cunho geométricos em que apenas detectariam a existência de números irracionais. Em LORIA(1929:23) encontra-se referências ao procedimento geométrico efetuado por TEODORO de CIRENE (+ 390 a.C.). É uma construção geométrica a partir da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado de lado um com seu lado. Estendendo esse lado unitário (que é o lado do quadrado de área unitária) os números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$ atestam a incomensurabilidade dos lados dos quadrados de áreas 3, 5, ..., 17 com o lado unitário conforme a figura 10 abaixo.

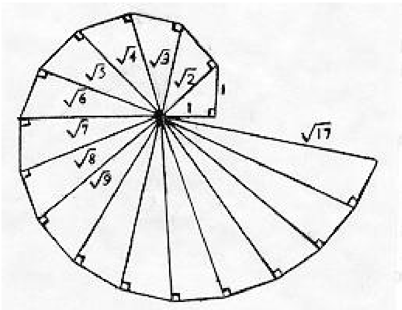


figura 10

As descobertas dos irracionais que se seguiriam refletem um procedimento característico da pesquisa pitagórica: a elaboração de procedimentos geométricos por construções de segmentos de retas.

Esses procedimentos justificam-se diante das limitações pitagóricas. Através da construção por segmentos de retas era possível uma representação concreta de quantidades contínuas, mesmo que não houvesse instrumentos que levassem a compreensão efetiva desses novos conceitos.

Os números incomensuráveis demonstraram que a reta não podia ser interpretada como uma simples justaposição finita de pontos, mas requeria um estudo de sua continuidade, um estudo que atestasse a questão do contínuo e do discreto. É interessante citar KLINE (1972:34)

> The Pythagorean discovery of incommensurable ratios brought to the fore a difficulty that preoccupied all the Greeks, namely, the relation of the discrete to the continuos. Whole numbers represent discrete objects, ortwo lengths that have a common unit measure so that each lengths is a discrete collection of units. However, lengths in general are not discrete collections of units; this is why rations of incommensurable lengths appear. Lengths, areas, volumes, time, and other quantities are, in other words, continuous. We would say that line segments, for

example, can have irrational as well as rational lengths in terms of some unit. But the Greeks had not attained this view .

(A descoberta Pitagórica das razões incomensuráveis levou a uma anterior dificuldade que preocupou todos os Gregos, a saber, a relação entre o discreto e o contínuo. Números inteiros representam objetos discretos, e uma razão comensurável representa uma relação entre duas coleções de objetos discretos, ou dois comprimentos que tem uma comum unidade de medida de modo que cada comprimento é uma coleção discreta de unidades. Contudo, comprimentos em geral não são coleções discretas de unidades; é por isso que razões de comprimentos incomensuráveis aparecem. Comprimentos, áreas, volumes, tempo, e outras quantidades são, em outras palavras, contínuos. Nós poderíamos dizer que segmentos de linha, por exemplo, podem ter comprimentos irracionais bem como racional em termos de alguma unidade. Mas os Gregos não tinham observado este fato.)

A representação numérica através das razões entre números inteiros passou a ser impossível para números que representassem grandezas incomensuráveis. A saída foi procurar uma representação concreta que não levasse à necessidade de elaborar uma representação abstrata própria; elaboração esta impossível de se realizar diante das deficiências numéricas gregas. A insuficiência da matemática grega se nutriria de uma representação concreta adequada através da construção geométrica de segmentos de reta. Com isto, a matemática grega deslocou-se progressivamente de uma ênfase aritmética dos pitagóricos para uma ênfase geométrica. Através da imagem geométrica trabalhava-se com grandezas comensuráveis ou mesmo incomensuráveis sem maiores problemas. Mais tarde, como se verá em detalhes, esse procedimento que foi utilizado como superação daquelas dificuldades, viria a cercear o posterior desenvolvimento algébrico.

Não se sabe, ao certo, quando exatamente ocorreu esta mudança. Mas é correto afirmar que nos "Elementos" de EUCLIDES(+- 300 AC) a mudança já fora total, com os números sendo considerados segmentos de retas. BOYER(1978:57) assinala que na época de PLATÃO(430-347 AC) a matemática grega sofrera mudanças drásticas referindo-se a ênfase geométrica. É bom lembrar que PITÁGORAS é de 530 AC aproximadamente.

Mesmo com essa alternativa paliativa, desde PITÁGORAS, as teorias das Proporcionais e de Semelhança continuaram a ser questionadas. Elas serviam muito bem para os números inteiros, mas não para os irracionais. O surgimento destes números abalou os alicerces dessas teorias.

A saída para este dilema se deu também sob o recurso da imagem geométrica. O responsável desse fato foi EUDOXUS(408-355 a.C.).

Segundo KLINE (1972:48), EUDOXUS em vez de considerar razões somente entre números inteiros, ele alarga o conceito de razão criando a noção de grandeza. Grandeza referia-se a entidades como segmentos de retas, áreas, volumes e tempo. Desta forma, a Teoria das Proporcionais passou a abarcar quantidades contínuas. Uma proporção passou a representar uma igualdade de duas razões entre grandezas que podem ser comensuráveis ou incomensuráveis. O recurso para representação dos proporcionais se deu sem valor numérico através da representação geométrica por segmentos de reta. Percebe-se que EUDOXUS com isto evitou os números irracionais ao não considerá-los como números que realmente são.

Se por um lado o trabalho de EUDOXUS possibilitou contornar a presença incômoda dos números irracionais na Teoria das Proporcionais e de Semelhança, por outro lado, acabou enfatizando o uso de procedimentos geométricos retardando ainda mais o desenvolvimento algébrico. Assim, os irracionais não receberam os estudos e aperfeiçoamentos que se faziam necessários continuando a serem considerados somente através das expressões concretas das figuras geométricas. Segundo KLINE(1972:49):

> The Eudoxian solution to the problem of treating incommensurable lengths or the irrational number actually reversed the emphasis of previous Greek mathematics.The early Pythagoreans had certainly emphasized number as the fundamental concept, and Archytas of Tarentum, Eudoxus' teacher, stated that arithmetic alone, not geometry, could supply satisfactory proofs. However, in turning to geometry to handle irrational numbers, the classical Greeks abandoned algebra and irrational numbers as such.
>
> (A solução Eudoxiana para o problema do tratamento de comprimentos incomensuráveis ou de números irracionais verdadeiramente reverteu a ênfase anterior da matemática grega. Os primeiros Pitagóricos tinham certamente enfatizado número como o conceito fundamental, e Archytas de Tarentum, professor de Eudoxus, afirmou que somente aritmética, e não geometria, poderia suprir provas satisfatórias. Todavia, aos nos voltarmos para geometria, por tratarem com números irracionais, os gregos clássicos abandonaram a álgebra e os números irracionais como tal.)

É importante reafirmar aqui o que já foi de certo modo explicitado anteriormente. O abandono da álgebra (mencionado por KLINE) refere-se ao desenvolvimento de procedimentos de cálculos. Incapacitados de responderem com uma estrutura lógica adequada os problemas de cálculos com irracionais (o que exigiria um sistema numérico maleável), os gregos, aproximadamente já por volta de 400 a.C., passaram a interpretar as operações algébricas como operações entre segmentos. É a chamada álgebra geométrica grega, o assunto do próximo sub-item.

II.2.2- A álgebra geométrica grega

O sub-item anterior demonstrou as limitações do sistema numérico grego para o tratamento de grandezas incomensuráveis. Incapazes de desenvolver uma simbologia para os números que representassem grandezas incomensuráveis, a saída adotada foi mesmo adotar a representação geométrica. Assim, as operações algébricas hoje entendidas, com os gregos se deram através do manuseio de figuras geométricas. Segundo KLINE (1972:64):

> The product of two numbers becomes the area of a rectangle with sides whose lengths are the two numbers. The product of three numbers is a volume. Addition of two numbers is translated into extending one line by an amount equal to the length of the other and subtraction into cutting off from one line the length of a second. Division of two numbers, which are treated as lengths, is merely indicated by a statement that expresses a ratio of the two lines...Division of a product (an area) by a third number is performed by finding a rectangle with the third number (length) as one side and equal in area to the given product. The other side of the rectangle is, of course, the quotient...The addition and subtraction of products are the addition and subtraction of rectangle. The sum or difference is transformed into a single rectangle by means of the method of application of areas. The extraction of a square root is, in this geometrical algebra, the finding of a square equal in area to a rectangle whose area is the given quantity...
>
> (O produto de dois números torna-se área de um retângulo com lados cujos comprimentos são dois números. O produto de três números é um volume. Adição de dois números é traduzido estendendo uma linha por uma quantia igual ao comprimento de outra e subtração cortando para uma linha o comprimento da segunda. Divisão de dois números, o qual são tratados como comprimentos, é simplesmente indicado por uma afirmação que expressa uma razão de duas linhas ... Divisão de um produto (uma área) por um terceiro número é executado encontrando um retângulo com o terceiro número (comprimento) como um lado e igual em área ao produto dado. O outro lado do retângulo é certamente, o quociente...A adição e subtração de produtos são a adição e subtração de retângulos. A soma ou diferença é transformada em um simples retângulo por meio de um método de aplicação de áreas. A extração da raiz quadrada é, na álgebra geométrica, encontrar o quadrado igual em área de um retângulo cuja área é a quantidade dada...).

EUCLIDES(330a.C.-275a.C.), por volta de 300a.C., sistematiza os conhecimentos matemáticos de sua época elaborando os treze livros de seu "Os Elementos". Um desses livros (o livro II) é totalmente dedicado a álgebra geométrica. Este livro não retrata um rompimento dos limites impostos pela deficiência no tratamento dos irracionais. Muito pelo contrário, nesta obra, EUCLIDES apresenta um desenvolvimento aprofundado do próprio cálculo concreto mediante construções geométricas. O que quer dizer que, sem ter rompido com as limitações existentes, EUCLIDES oferece as condições necessárias para o desenvolvimento da matemática grega mesmo não reconhecendo a existência dos números irracionais.

BOYER (1978:79) afirma

> Diz-se às vezes que os gregos não possuíam uma álgebra, mas isto é evidentemente falso. Tinham o livro II de Os Elementos, que é uma álgebra geométrica servindo aos mesmos fins que nossa álgebra simbólica. Não há dúvida que a álgebra moderna facilita grandemente a manipulação de relações entre grandezas. Mas também é verdade que um geômetra grego conhecendo os quatorze teoremas da "álgebra" de Euclides era muito mais capaz de aplicar esses teoremas a questões práticas de mensurações do que um geômetra experimentado de hoje. A álgebra geométrica antiga não era um instrumento ideal, mas era eficaz.

As quatorze proposições contidas no livro II de EUCLIDES está muito bem comentada no volume I de HEATH(s/d:372). Abaixo, há o enunciado dos resultados demonstrados por EUCLIDES apresentados em HEATH referente às dez primeiras proposições considerando o equivalente na linguagem algébrica hoje conhecida .

Prop.1: $a(b + c + d +...) = ab + ac + ad + ...$

Prop.2: $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2$

Prop.3: $(a + b)a = ab + a^2$

Prop.4: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Prop.5: $ab + \{(a +b)/2 - b\}^2 = \{(a + b)/2\}^2$ ou $(a + \beta)(a - \beta) + \beta^2 = a^2$

Prop.6: $(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$ ou $(a + \beta)(\beta - a) + a^2 = \beta^2$

Prop.7: $(a + b)^2 + a^2 = 2(a + b)a + b^2$ ou $a^2 + \beta^2 = 2a\beta + (a -\beta)^2$

Prop.8: $4(a + b)a + b^2 = \{(a + b) + a \}^2$ ou $4a\beta + (a - \beta)^2 = (a + \beta)^2$

Prop.9: $a^2 + b^2 = 2\{ ((a + b)/2)^2 + ((a +b)/2 - b)^2\}$ ou $(a + \beta)^2 + (a - \beta)^2 = 2(a^2 + \beta^2)$

Prop.10: $(2a + b^2) + b^2 = 2\{a^2 + (a + b)^2 \}$ ou $(a + \beta)^2 + (\beta - a)^2 = 2 (a^2 + \beta^2)$

Os resultados sistematizados por EUCLIDES apresentam algumas proposições de fácil compreensão. Porém, a maioria delas demonstram uma assimilação nada fácil. Para não estender por demais o assunto, é apresentado aqui apenas quatro resultados (quanto a maiores detalhes a respeito das demonstrações, ver a indicação bibliográfica).

1) Enunciado com a simbologia atual:

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

Observação: Na álgebra atual a resolução dessa expressão se dá pelo uso da lei distributiva. EUCLIDES (1945:53) enuncia da seguinte forma:

> Se houver duas linhas retas, e uma delas for dividida em quantas partes se quiser, será o retângulo compreendido pelas duas retas igual aos retângulos compreendidos pela reta inteira, e pelos segmentos da outra.

Isto está representado pela figura 11.

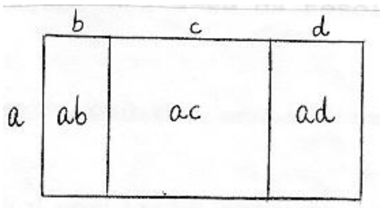


figura 11

2) Enunciado com a simbologia atual:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Observação: O quadrado de uma soma é igual ao quadrado da primeira mais o dobro do produto da primeira pela segunda, mais o quadrado da segunda. EUCLIDES (1945:55) enuncia da seguinte forma:

> Se uma linha reta for cortada em duas partes quaisquer, será o quadrado da toda igual aos quadrados das partes, juntamente com o retângulo das mesmas partes, tomado duas vezes.

Isto está representado pela figura 12 abaixo:

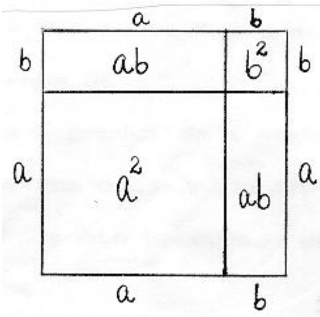


figura 12.

3) Enunciado com a simbologia atual:

$(a + x)a = x^2$ ou $x^2 + ax = a^2$ (Proposição 11 de EUCLIDES).

Observação: trata-se da resolução de um tipo de equação do 2ºgrau. EUCLIDES (1945:62) enuncia da seguinte forma:

> Dividir uma linha reta de sorte que o retângulo da toda e de uma parte seja igual ao quadrado da outra parte.

Etapas da demonstração apresentada por EUCLIDES:

Dado AB = a (figura 13).

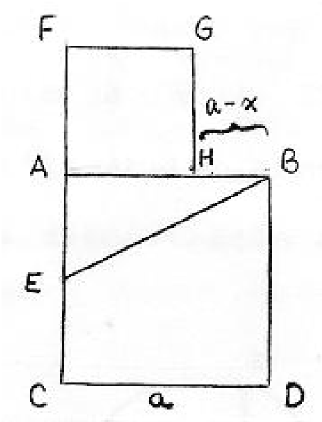


figura 13

Construa o quadrado ABCD.

Seja E o ponto médio de AC.

Desenhe BE.

Seja F produzido a partir de AC de modo que EF = EB.

Construa o quadrado AFGH.

H é o ponto procurado em AB.

De fato, AB.BH = AH.AH

$$a(a - x) = x.x$$

$$a^2 - ax = x^2$$

$$a^2 = x^2 + ax$$

4) Enunciado com a simbologia atual:

$x^2 = a.b$ (Proposição 14 de EUCLIDES)

Observação: trata-se da resolução de um outro tipo de equação do 2º grau. EUCLIDES (1945:65) enuncia da seguinte forma:

Construir um quadrado igual a um retilíneo dado.

O retilínio a qual EUCLIDES se refere pode ser um polígono. A figura 14 abaixo considera um retângulo ABEF.

Etapas da demonstração apresentada por EUCLIDES:

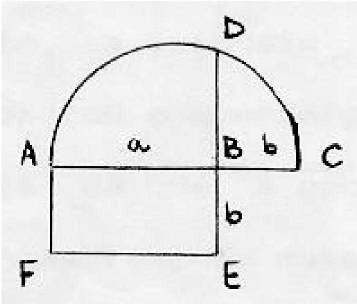


fig.14

Estendendo AB até C de modo que BC = BE.

Considere o círculo de diâmetro AC. A partir de B traça-se uma perpendicular encontrando o círculo no ponto D.

A raiz procurada é o quadrado em DB.

A álgebra geométrica grega já totalmente elaborada na época de EUCLIDES, enquanto um instrumento poderoso de investigação matemática, retrata a saída possível face a suas limitações na interpretação de grandezas contínuas. O não reconhecimento dos irracionais possivelmente foi a maior limitação da matemática grega, que nem por isso deixou de se desenvolver. O seu desenvolvimento se deu atrelada a representação concreta das construções geométricas no tratamento de quantidades contínuas.

Se a complexidade atingida retrata o alto nível da matemática grega, por outro lado, demonstra a utilização progressiva após EUCLIDES de métodos geométricos até a exaustão, ocasionando demonstrações complicadas e de características heterogêneas. Cada resultado originava-se de construções geométricas específicas. Faltou uma generalização em um método único.

No entanto, a riqueza da maleabilidade geométrica desenvolvida influenciou o aperfeiçoamento posterior da matemática ao induzir a idéia de que a geometria (apenas a geometria) era base segura para investigações matemáticas. Esse fato, refletiu implicitamente a incapacidade de um desenvolvimento abstrato no tratamento dos procedimentos algébricos, o que levou ao recurso da empiria das figuras geométricas como única base sólida possível para aceitação de novos resultados matemáticos.

Por outro lado, a priorização das formas geométricas em detrimento de um desenvolvimento próprio das expressões algébricas na matemática grega na antiguidade vai ocasionar um fraco desenvolvimento da álgebra e da aritmética. KLINE(1972:173) analisa muito bem este fato e suas conseqüências:

Had the Greeks faced the irrational number, they might have furthered the development of arithmetic and algebra; and even if they themselves had not done so, they would not have hindered later generations, which were induced to think that only geometry offered a secure foundation for the treatement of any magnitude whose values might include irrationals. Archimedes, Heron, and Ptolemy started to work with irrationals as numbers, but did not alter the tenor of Greek mathematics or the subsequent impress of Greek thought. The Greek concentration on geometry blurred the vision of later generations by masking the intimate correspondence between geometric and arithmetic concepts and operations. The failure to define, acceptand conceptualize the irrational as a number forced a distinction between number and magnitude. Consequently, algebra and geometry were regarded as unrelated disciplines .

(Tivessem os gregos encarado o número irracional, eles poderiam ter adiantado o desenvolvimento da aritmética e álgebra; e exatamente se eles mesmos não tivessem feito também, eles não teriam impedido gerações posteriores, o que foi induzido a pensar que somente geometria oferecia uma fundamentação segura para o tratamento de alguma grandeza cujos valores poderiam incluir irracionais. Archimede, Heron e Ptolomeu seguiram o trabalho com irracionais como números, mas não fizeram mudar o conteúdo da matemática grega ou a subsequente impressão do pensamento grego. A concentração grega na geometria obscureceu a visão das gerações posteriores disfarçando a íntima correspondência entre conceitos geométricos e aritméticos e operações. A falta para explicar, admitir e conceituar o irracional como um número forçou uma distinção entre número e grandeza. Conseqüentemente álgebra e geometria foram vistas como disciplinas desconexas).

Nota-se, porém, nesse momento um fato curioso que foi decisivo no estudo efetuado por DESCARTES séculos mais tarde: a ênfase no manuseio das figuras geométricas levaria a matemática grega a um grau tão alto de complexidade nas construções geométricas que eles, inclusive, chegariam a desenvolver, mesmo de forma parcial, o conceito de coordenadas geométricas sem que disso chegassem a ter consciência.

A importância desse fato se dá porque o conceito de coordenadas é fundamental na elaboração da geometria analítica. Elas são o próprio instrumento matemático que unifica os processos algébricos e geométricos. Esse fato será mais detalhado no capítulo referente a análise dos procedimentos de ensino da geometria analítica (capitulo III). No entanto, cabe aqui nesse momento, levantar os subsídios históricos necessários para compreensão da lógica de elaboração das coordenadas. Assim, no próximo sub-item, apresenta-se a análise de como se deu a elaboração dos primeiros indícios da noção de coordenadas entre os gregos.

II.2.3- A noção de coordenadas em APOLÔNIO e MENAECMO

A presença das primeiras noções de coordenadas entre os gregos se deu em decorrência da necessidade de respostas a questões específicas que os obrigaram a desenvolver, no manuseio das figuras, formas complexas nas quais muito mais tarde, DESCARTES reconhecera os gérmens das idéias de coordenadas geométricas. No entanto, DESCARTES, como se verá em detalhes, apreende essas idéias sob a óptica de uma álgebra já bastante desenvolvida em sua época. É através do domínio dessa álgebra que DESCARTES acaba desenvolvendo um estudo dos resultados obtidos pelos gregos, e que lhe permitiu lançar as bases fundamentais da geometria analítica.

As primeiras noções abstratas de coordenadas geométricas surgiram nos estudos geométricos de MENAECMO (375-325 AC) e de APOLÔNIO (+- 260-200 AC).

Nos trabalhos de MENAECMO e de APOLÔNIO, a utilização do conceito de coordenadas ocorre de uma forma simplista, muito distante do conceito moderno. As coordenadas, conforme se verá, apareciam através de eixos de referências utilizados posteriormente à curva para o estudo de suas propriedades. Assim, nestes trabalhos, as equações eram obtidas pelas curvas; e não que as curvas fossem obtidas pelas equações que as representassem. Não existia, nos procedimentos adotados, uma biunicidade entre curva e equação, biunicidade essa, hoje existente na geometria analítica. Porém, apesar daquilo que hoje é considerado insuficiência, os estudos de MENAECMO e de APOLÔNIO foram decisivos para as inovações matemáticas apresentadas por DESCARTES séculos mais tarde.

Primeiramente, será considerado o estudo de MENAECMO.

O estudo efetuado por MENAECMO parte da resolução por meio de secções cônicas do problema da determinação de dois meios geométricos entre duas grandezas.

Essa resolução é uma interpretação do estudo de HIPÓCRATES de CHIOS (+- 430 AC) de áreas e proporções na resolução do problema de DELOS: dada a aresta de um cubo, construir só com régua e compasso a aresta de um segundo cubo tendo o dobro do volume do primeiro (VASCONCELOS,sd:227).

HIPÓCRATES obteve a transformação por área de um retângulo de lados a e b em um quadrado mediante a determinação da média geométrica entre a e b. Assim, dados a e b determina-se x tal que

$$a/x = x/b$$

O que leva a

$$x^2 = ab$$

Estendendo esse resultado, HIPÓCRATES observou que o cálculo de dois meios geométricos x e y entre as grandezas a e b se daria na forma

$$a/x = x/y = y/b$$

HIPÓCRATES então afirmou que a duplicação do cubo poderia ser obtida se pudesse ser encontrado curvas expressas pela proporção

$$a/x = x/y = y/2a$$

Isto é, a proporção anterior considerando b = 2a.

A partir daí, MENAECMO seguindo HIPÓCRATES, estudou a intersecção das curvas $x^2 = ay$ e $y^2 = xb$; $xy = ab$ e $y^2 = bx$ tiradas da proporção acima enunciada. De fato, de $a/x = x/y = y/2a$ tira-se

$$a/x = y/b \Rightarrow xy = ab \Rightarrow xy = 2.a^2$$

$$x/y = y/b \Rightarrow y^2 = bx \Rightarrow y^2 = 2ax$$

Sob o ponto de vista moderno, analisando as curvas $x^2 = ay$ e $y^2 = xb$; $xy = ab$ e $y^2 = bx$ tem-se

1) $x^2 = ay$ e $y^2 = xb$

Trata-se da intersecção entre duas parábolas (figura 15).

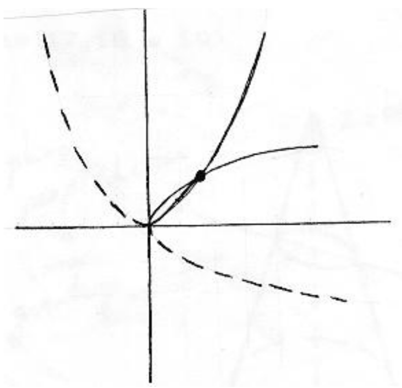


fig.15

2) $xy = ab$ e $y^2 = xb$

Trata-se da intersecção entre uma hipérbole equilátera ($xy = ab$) e uma parábola ($y^2 = bx$) como mostra a figura 16.

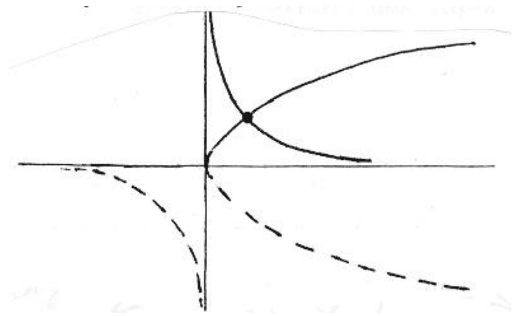


fig.16

Porém, a solução de MENAECMO é apresentada pelas argumentações da álgebra geométrica, isto é, com a utilização de conceitos próprios da Teoria de Semelhança e das Proporcionais através da aplicação de áreas nas secções cônicas. O termo secções cônicas refere-se ao fato dos antigos geômetras conhecerem a obtenção das cônicas elipse, parábola e hipérbole segundo secções perpendiculares a uma geratriz de um cone circular reto conforme o ângulo no vértice fosse respectivamente agudo, reto ou obtuso (figuras 17,18 e 19).

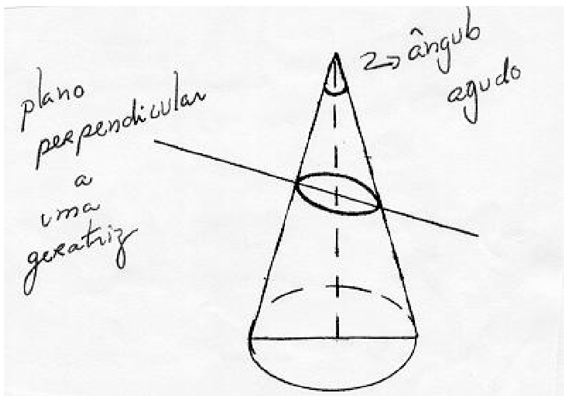


fig.17

Aqui, o ângulo do vértice do cone é agudo e o corte produzido determina uma elipse.

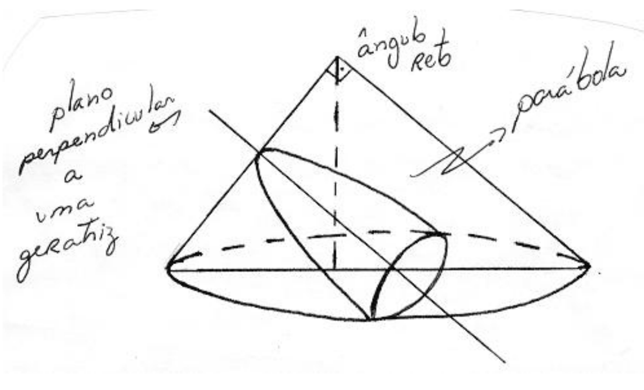


fig.18

Aqui (fig. 18), o ângulo do vértice do cone é reto e o corte produzido determina uma parábola.

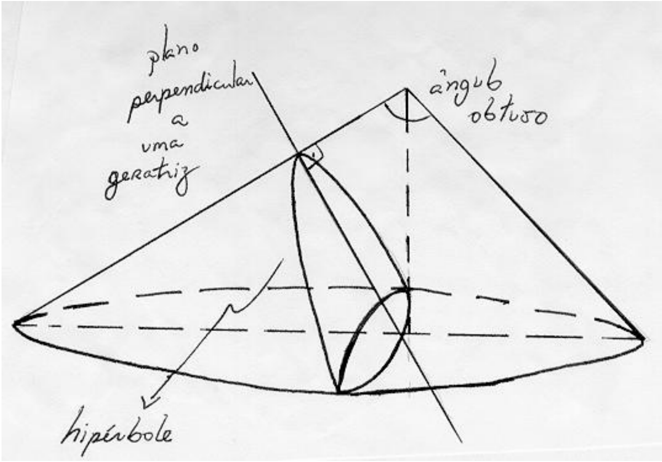


fig.19

Aqui, o ângulo do vértice do cone é obtuso e o corte produzido determina uma hipérbole.

Mas é interessante observar que na época de MENAECMO as cônicas elipse, hipérbole e parábola não eram assim denominadas. Essas curvas eram descritas pela forma pelo qual foram descobertas. Elipse era denominada oxytome, referência às secções do cone acutângulo; hipérbole era amblytome, referência às secções do cone obtusângulo; e finalmente, parábola era orthotome, referência às secções do cone retângulo (BOYER,1974:107).

Além disso, MENAECMO é considerado na história como o primeiro geômetra a elaborar uma representação estereométrica dessas curvas caracterizando suas propriedades (VASCONCELOS,sd:227).

Pela distinção em três tipos de cones quanto ao ângulo do vértice, o estudo de MENAECMO se deu em cada curva isoladamente. Daí a denominação entre os antigos de tríada de MENAECMO significando uma referência às curvas elipse, hipérbole e parábola.

A análise de MENAECMO por secções no cone procedia-se utilizando-se da Proposição 35, Livro III dos Elementos de EUCLIDES assim enunciada (EUCLIDES,1945:94).

> Se dentro de um círculo qualquer duas linhas retas se cortarem, será o retângulo, compreendido pelos segmentos de uma, igual ao retângulo compreendido pelos segmentos da outra
>
> As figuras possíveis são (figuras 20a,20b,20c e 20d - JRBG)

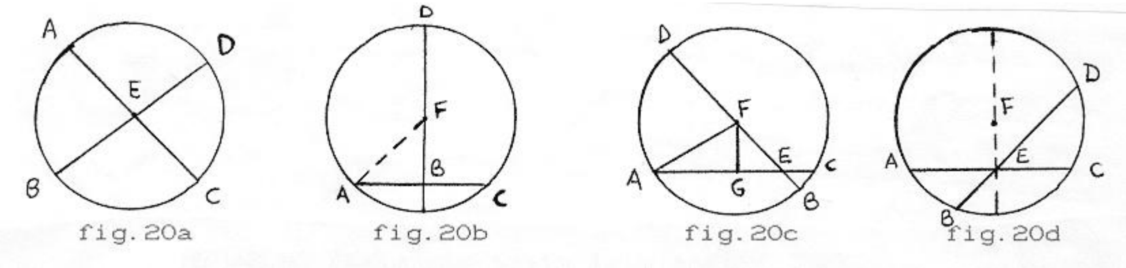


fig. 20a fig. 20b fig. 20c fig. 20d

Dentro do círculo:
ABCD contem-se reciprocamente as duas retas AC, BD no ponto E. Digo que o retângulo compreendido pelos segmentos AE, EC é igual ao retângulo compreendido pelos segmentos BE, ED.

Sendo assim, a aplicação da Proposição 35, Livro III pode também ser pensada para construção de uma ordenada a partir de um ponto em um diâmetro de um círculo qualquer (figura 21 abaixo).

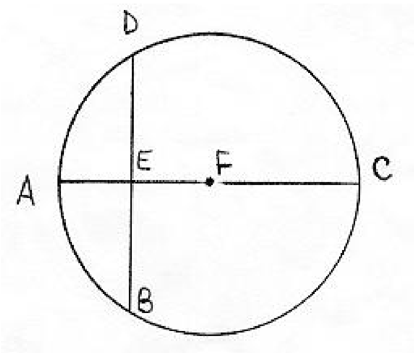


fig.21

Tem-se

AC : diâmetro

E : ponto do diâmetro o qual é construído a ordenada DB

DE = EB

Pela proposição enunciada é sabido que DE.EB = AE.EC

Mas na figura DE = EB logo DE.DE = AE.EC $\Rightarrow$ DE^2 = AE.EC, isto é, o quadrado da ordenada DE é igual ao produto dos segmentos AE e EC contidos no diâmetro AC.

MENAECMO fazia uso deste fato assim:

1) Considerando um cone qualquer (de vértice agudo, reto ou obtuso) procedia uma secção perpendicular a um elemento da geratriz do cone (figura 22);

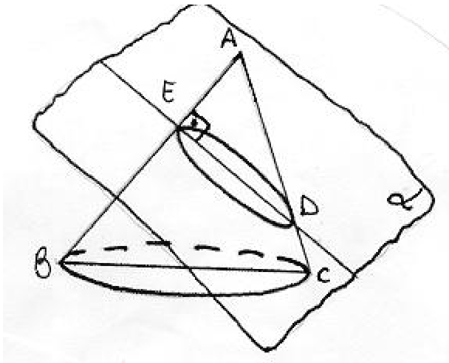


fig.22

Na figura 22 tem-se:

- cone de vértice A e circulo base com diâmetro BC.

- plano α perpendicular a um elemento (E) da geratriz (AB).

- plano α determina na intersecção com o cone a curva de pontos E, D (no caso e uma elipse já que o ângulo A é agudo).

2) Por um ponto qualquer da curva obtida pela intersecção do cone e do plano perpendicular procedia nova secção por um plano paralelo ao círculo da base (figura 23);

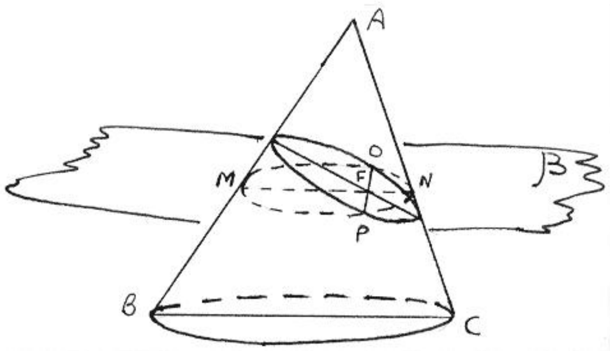


fig.23

Na figura 23:

P ponto qualquer da curva elipse.

plano β é o novo corte.

plano β é paralelo ao circulo da base.

plano β determina o circulo de diâmetro MN passando por P.

3) Essa nova secção determinava um novo círculo, paralelo ao círculo da base. Observando neste novo círculo, a relação com seu diâmetro e a sua ordenada oriunda do

plano perpendicular ao elemento da geratriz, aplicava-se a Proposição 35 do Livro III de EUCLIDES (figura 24).

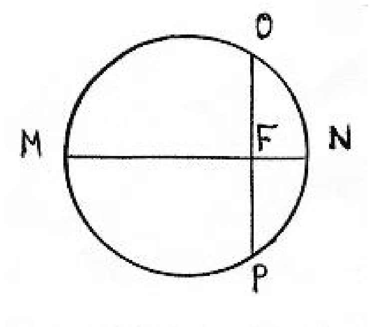


fig.24

planificação dos cortes : $PF^2 = MF.FN$ ("Prop.35 do Livro III de EUCLIDES")

Menaecmo determinava as propriedades das cônicas utilizando-se da Teoria de Semelhança e das Proporcionais.

Na medida em que até o momento, não foi encontrado uma bibliografia que explicasse todo o raciocínio de MENAECMO com seus próprios símbolos, é apresentado a seguir o raciocínio de MENAECMO com os símbolos numéricos hodierno exposto em BOYER(1974:69) para o caso da parábola (figura 25).

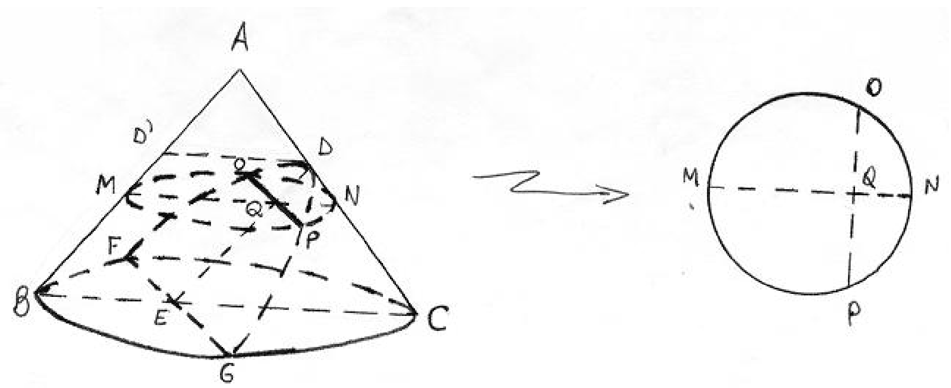


fig.25

Tem-se $QP^2 = MQ.QN$ (Prop.35 Livro III EUCLIDES) (I)

Os triângulos QDN e BCA são semelhantes, conseqüentemente $QN/DQ = BC/AB$ (II)

Os triângulos D'DA e ABC são semelhantes, consequentemente $D'D/AD' = BC/AB$ (III)

Da figura, $MQ = D'D$ (IV)

Logo $QP^2 = MQ.QN$

De (IV) vem

$QP^2 = D'D.QN$

Mas de (III) vem

$D'D = AD'.(BC/AB)$

Da mesma forma, de (II) vem

$QN = DQ. (BC/AB)$

Tinha-se

$QP^2 = D'D.QN$

Logo

$QP^2 = AD'.(BC/AB).DQ.(BC/AB) =$

$QP^2 = AD'.(BC^2 /AB^2) .DQ$

Mas da figura observe que AD', BC e AB são constantes para qualquer ponto P da curva DOFGP. Isto porque para um outro ponto P' da curva DOFGP os segmentos AD', AB e BC permaneceriam constantes (conforme é mostrado na figura 26 abaixo).

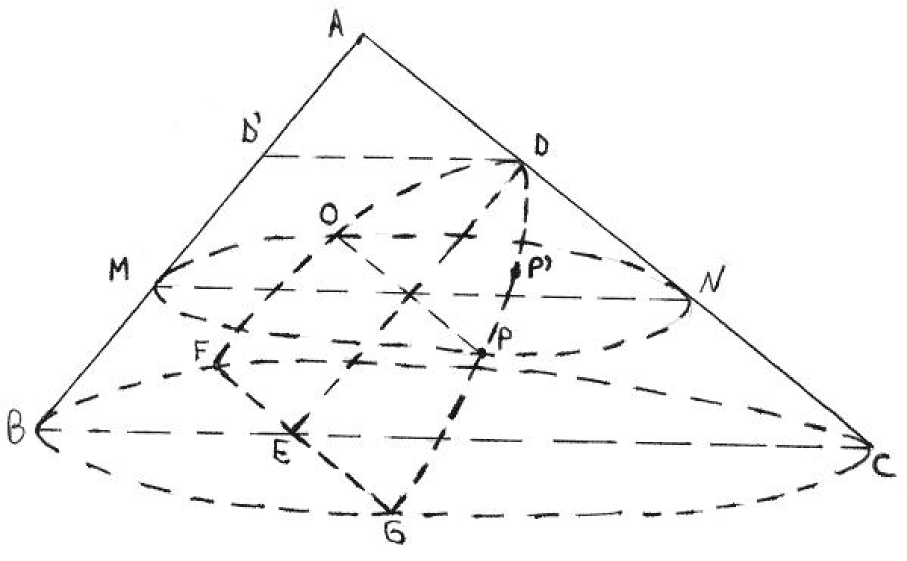


fig.26

Voltando a figura 25, considerando QP e QD como sendo as coordenadas do ponto P da curva, onde QP = y, DQ = x a equação

$QP^2 = AD'. (BC^2 /AB^2) .DQ$ fica $y^2 = AD'.(BC^2 /AB^2).x$

Como AD', AB e BC são constantes, então $AD'.(BC^2/AB^2)$ pode ser representado por uma constante w.

Portanto, chega-se a $y^2 = w.x$ a equação da parábola na notação moderna

Analisando o exemplo de MENAECMO, é possível observar que seu estudo se orienta na relação entre o diâmetro MN e o ponto P da curva DOFGP. Note-se aqui, a utilização de uma pequena noção de eixos de referências. Tal fato, como se verá em detalhes, será uns dos indícios que influenciarão DESCARTES, séculos mais tarde, a elaborar os primeiros conceitos da geometria analítica.

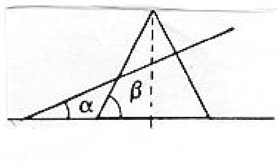
Agora, quanto aos estudos elaborados por APOLÔNIO:

A partir dos conceitos primeiramente abordados por MENAECMO, APOLÔNIO de Perga (+- 260-200 AC) em sua obra "Cônicas" inova ao perceber que as três curvas poderiam ser igualmente obtidas de um único cone não necessariamente reto, de acordo com o plano de inclinação da secção (figuras 27, 28 e 29) em relação ao ângulo da base do cone.

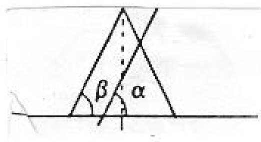
fig.27 fig.28 fig.29

Nas figuras 27, 28 e 29 acima, pode-se expressar o ângulo de inclinação da secção por α e o ângulo da base do cone por β obtendo, assim, a caracterização de cada curva (conforme mostram as figuras 30,31,32 abaixo).

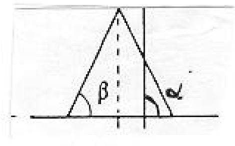
fig.30 fig.31 fig.32



$0 < \alpha < \beta$



$\alpha = \beta$



$\alpha > \beta$

Outra inovação apresentada por APOLÔNIO, é a consideração no caso da hipérbole, do cone de duas folhas (figura 33). Com isto introduziu-se a aceitação da hipérbole com seus dois ramos. Até então, a análise efetuada pelos gregos se dava para duas hipérboles separadamente, referente aos dois ramos de uma mesma hipérbole.

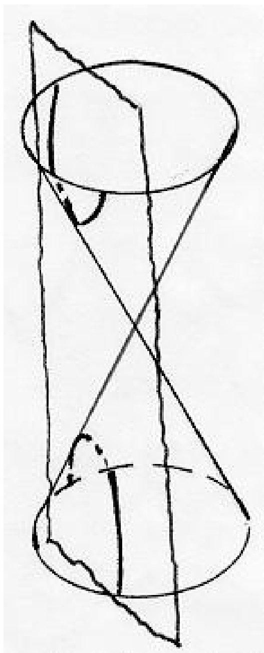


figura 33

É de APOLÔNIO a origem dos termos elipse, hipérbole e parábola. Ele se referiu a terminologia pitagórica para solução de equações quadráticas por aplicações de áreas.

Segundo BOYER (1974:108)

> Ellipsis (significando falta) tinha sido a palavra usada quando um retângulo de área dada era aplicado a um segmento e lhe faltava um quadrado (ou outra figura específica), e hyperbola (um lançamento além) tinha sido a palavra usada quando a área excedia o segmento. A palavra parábola (indicando colocar ao lado ou comparação) não indicava nem excesso nem deficiência.

Seu procedimento era semelhante ao de MENAECMO, porém, APOLÔNIO chegou a resultados muito mais avançados.

APOLÔNIO, seguindo MENAECMO, determinava as curvas por secções a partir de um cone no espaço. Depois disto, suas considerações eram desenvolvidas planificando a secção, como fora mostrado nos ítens referentes a MENAECMO).

As definições das curvas parábola, hipérbole e elipse aparecem respectivamente enunciadas nas proposições 11, 12 e 13 do seu Livro I (APOLLONIUS,1952:616). Nessas proposições verifica-se a utilização de coordenadas como referências na aplicação do cálculo de áreas, sendo que é a aplicação de áreas que determina a origem dos nomes dados as curvas.

Buscando compreender o conceito de coordenadas em APOLÔNIO, optou-se aqui em analisar com detalhes as demonstrações das proposições 11, 12 e 13 seguindo a exposição feita pelo próprio APOLÔNIO em seu livro I (APOLLONIUS, 1952:616). Tais proposições enfocam resultados explicitados no livro "Os Elementos" de EUCLIDES. Para não se alongar por demais o texto, optou-se em apenas indicar as proposições de EUCLIDES utilizadas, devendo o leitor buscar na fonte bibliográfica, um entendimento completo do assunto.

Além disso, cabe aqui ressaltar que se está trabalhando com a notação algébrica hodierna. Obviamente existe uma diferença em relação a simbologia da álgebra geométrica de APOLÔNIO. Por exemplo, uma expressão como $KA^2/BK.KC = FH/FL$ é escrita por APOLÔNIO assim (TALIAFERRO in VASCONCELOS,1952:603):

sq.KA : rect.BK,KC::FH : FL.

Isto é, o quadrado KA está para o retângulo de lados BK e KC, assim como FH está para FL.

Note que tal notação evidencia uma representação intimamente atrelada a seu objeto concreto que é a figura geométrica.

Considerando-se primeiramente a proposição 12 referente a hipérbole tem-se:

Considere o cone de vértice A e sua base, o círculo de diâmetro BC (figura 34).

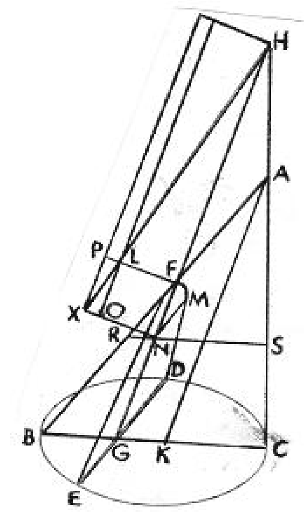


figura 34

Passando um plano através de seu eixo (a reta que une o vértice ao centro da base), este determina o triângulo axial ABC (a planificação do corte).

Considere nova secção de forma que ao passar pelo plano da base em BC, esta determina uma linha DE tal que seja perpendicular a BC.

Esta nova secção determina a curva DFE.

A linha FG na curva DFE é denominada diâmetro da secção.

Fazendo o prolongamento de FG, este produz em AC o ponto H.

Desenhe a linha AK paralela a FG, o diâmetro da secção.

Considere a linha FL desenhada a partir de F, perpendicular a FG de modo que valha a relação $KA^2/BK.KC = FH/FL$

Tome um ponto M na curva DFE.

Trace o ponto N de sorte que a linha MN seja paralela a DE.

De N também considero a linha NOX paralelo a FL.

Produza a linha HL estendendo-a até X.

Trace LO e XP de sorte que LX seja paralela a FN.

Tais considerações levam APOLÔNIO a afirmar que MN é igual ao quadrado do paralelogramo FX (isto é, FNXP) ao qual é aplicado FL, tendo FN como expressão, e excedendo por uma figura LX (isto é, LPXO) semelhante ao retângulo contido por HF e FL.

A demonstração desta afirmação é assim apresentada:

Considerando RS desenhado através de N paralelo a BC de maneira que cruze AB em R e AC em S.

RS é o diâmetro da secção circular do cone feita por um plano paralelo a base.

Da proposição 35 livro III de EUCLIDES pode-se afirmar que

$MN^2 = RN.NS$

Além disso, foi suposto que $KA^2 /BK.KC = FH/FL$

Mas $AK^2 / BK.KC$ é igual a (AK/KC).(AK/KB)

Portanto na expressão $KA^2/BK.KC = FH/FL$ pode-se também afirmar que FH/FL é igual a (AK/KC).(AK/KB).

Mas pela análise da construção tem-se AK/KC = HG/GC = HN/NS

Logo AK/KC = HN/NS (II)

Da construção geométrica tem-se também AK/KB = FG/GB = FN/NR

Logo AK/KB = FN/NR (III)

Substituindo (II) e (III) em FH/FL = (AK/KC).(AK/KB) tem-se

HF/FL = (HN/NS).(FN/NR)

Além disto, a construção permite afirmar

(HN.NF) / (SN.NR) = (HN.NS).(FN/NR) (segundo EUCLIDES livro VI, proposição 23).

Mas (HN.NS).(FN/NR) é igual a HF/FL.

Conseqüentemente também (HN.NF) / (SN.NR) = HF/FL = HN/NX (IV) (segundo EUCLIDES livro VI, proposição 4).

Mas como a linha NF é tomada como comprimento comum, então

HN/NX = (HN.NF) / (FN.NX) (V) (segundo EUCLIDES livro VI, proposição 1).

De (IV) e (V) conclui-se (HN.NF)/(SN.NR) = (HN.NF)/(XN.NF)

E daí necessariamente SN.NR = XN.NF

Mas fora observado que $MN^2 = SN.NR$

Portanto também $MN^2 = XN.NF$

Mas XN.NF é o paralelogramo XF. Portanto, o quadrado de MN é igual ao paralelogramo XF, sendo que XF aplicado a partir de FL determina o retângulo FNLO e o retângulo-excesso LPXO semelhantemente construído em relação ao retângulo HL formado por FL e HL. Dai a denominação de HIPÉRBOLE.

Procedimento análogo é o efetuado no caso da parábola (proposição 11) e da elipse (proposição 12).

Na parábola tem-se (APOLLONIUS,1952:615):

Uma secção do cone determina a curva DFE de forma ao diâmetro FG da secção ser paralelo a AC (figura 35).

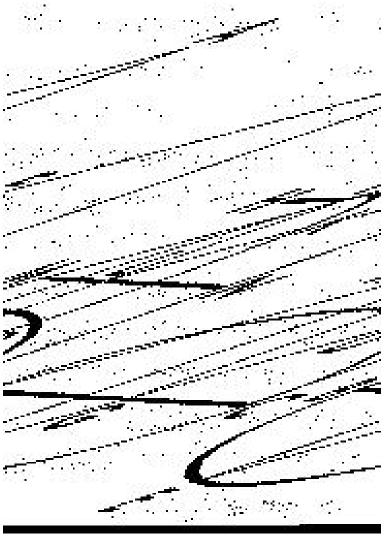


figura 35

Constrói-se FH perpendicular a FG de forma que valha a relação

$$BC^2 /(BA.AC) = FH/FA.$$

Tomado aleatoriamente o ponto K na curva DFE, seja KL produzido de forma a ser paralelo a DE.

APOLÔNIO afirma que KL^2 = HF.FL.

Sua demonstração levará a igualdade ML.LN = HF.FL e também a ML.LN = KL^2, o que APOLÔNIO conclui que, de fato, KL^2 = HF.FL

Mas isto significa que o quadrado de KL é exatamente o retângulo aplicado a FH com largura FL. Daí a denominação de parábola.

Observe que no caso da hipérbole, KL corresponde a MN (compare as figuras 34 e 35 repetidas abaixo). Na hipérbole o retângulo XN.NF (referência a MN^2 = XN.NF) aplicado no segmento FL o excedia. Na parábola, o retângulo HF.FL (referência a KL^2 = HF.FL) aplicado ao segmento FL o igualava em área.

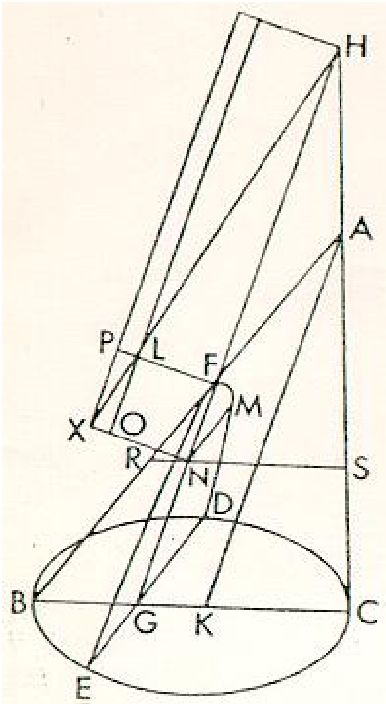


figura 34

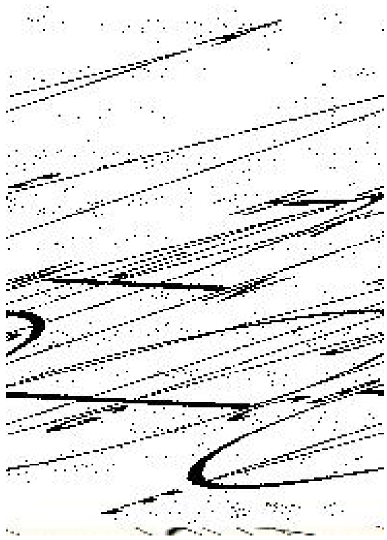


figura 35

Finalmente, no caso da elipse tem-se (APOLLONIUS, 1952:618): Considere uma secção determinando a linha DE (figura 36).

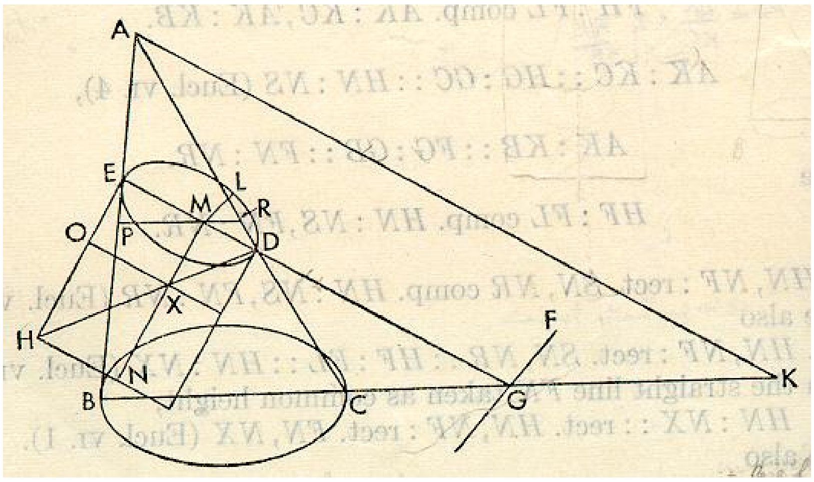


fig.36.

Seja FG perpendicular a BC.

Seja EH construído a partir de E, de forma a ser perpendicular a ED.

Seja AK traçado paralelamente a ED de forma a valer

$$AK^2 /(BK.KC) = DE/EH$$

Tomando L na secção de diâmetro ED, constrói-se LM paralelo FG.

APOLÔNIO afirma que LM é o quadrado de área aplicada a EH tendo como largura EM, sendo menor em área ao retângulo contido por DE e EH.

A demonstração de APOLÔNIO parte da construção de DH e MXN através de M paralelo a HE; e HN e XO através de H e X paralelos a EM.

Considerando PMR através de M paralelo a BC conclui-se que $PM.MR = LM^2$

Outros resultados obtidos por semelhanças leva APOLÔNIO a concluir que $PM.MR = XM.ME$

Portanto, também $LM^2 = XM.ME$

Isto significa que o quadrado de linha LM é igual ao paralelogramo MO que é aplicado a linha HE tendo EM como largura, e incompleto em área pelo retângulo ON semelhante ao retângulo contido por DE e EH. Daí a denominação de ELIPSE.

APOLÔNIO, após caracterizar as curvas pela aplicação de áreas, chega a resultados meticulosos que compõem seus setes livros encontrados.

As proposições 11,12 e 13 de APOLÔNIO mostram o uso das coordenadas através de eixos de referências. Estes eixos são o diâmetro da cônica obtidas por secções de planos (FG nas figuras 34, 35 e ED na figura 36 repetidas abaixo), e a tangente ao diâmetro pela secção triangular ABC (representada pelos pontos FL, para o caso da hipérbole; FH para o caso da parábola e EH para o caso da elipse).

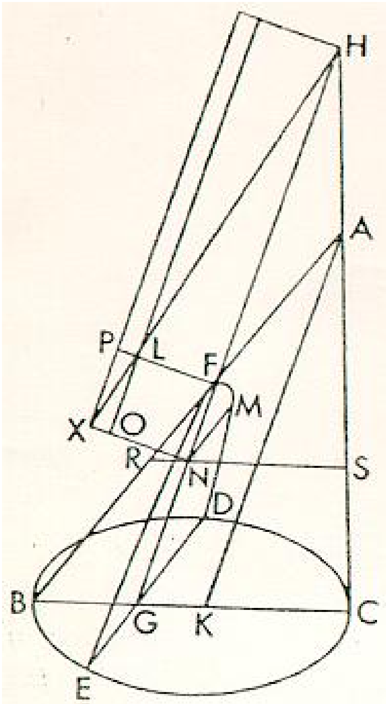


figura 34

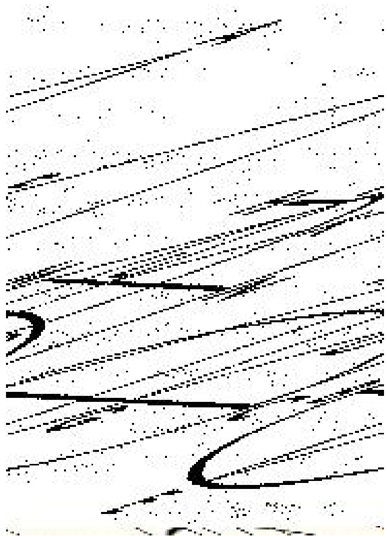


figura 35

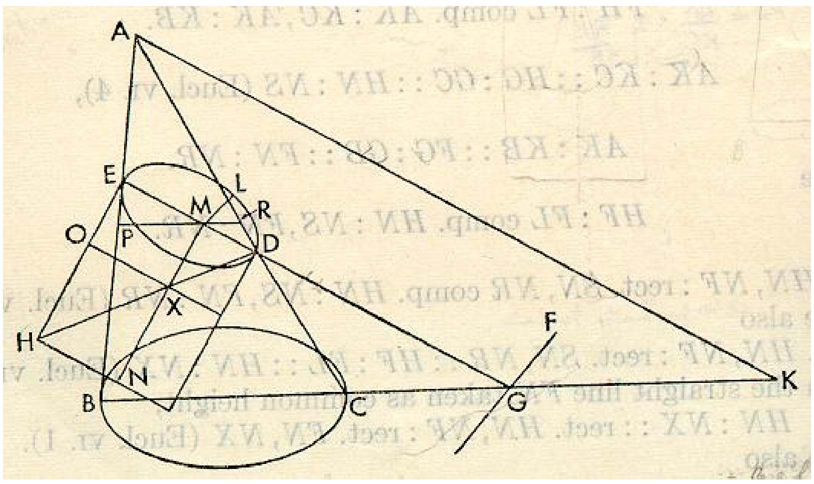


fig. 36

Uma comparação entre o sistema de referência adotado por APOLÔNIO e os eixos X e Y que compõem o moderno sistema cartesiano, demonstra que o sistema de referência de APOLÔNIO se faz posteriormente a curva para o estudo de suas propriedades. Na geometria analítica moderna é precípuo o papel apriori do sistema cartesiano para o estudo das curvas.

Em APOLÔNIO, as equações eram obtidas pelas curvas e não que as curvas fossem elaboradas pela análise das equações que as representassem. A inexistência da biunicidade possível entre curva e equação se dá em decorrência da falta de uma álgebra muito mais dinâmica que a álgebra geométrica grega.

A determinação de curvas a partir do estudo das equações só seria possível mediante a elaboração de instrumentos matemáticos que retratassem formas muito mais abstratas que as figuras geométricas presentes na álgebra geométrica grega.

Mas este instrumento matemático só surgiria com o desenvolvimento da álgebra.

O desenvolvimento da álgebra até DESCARTES caracterizou-se por etapas que retratavam inicialmente uma necessária dependência às formas geométricas para sua construção e, com o seu desenvolvimento, uma independência destas, constituindo-se então, no estudo de leis e processos formais das operações com entidades abstratas.

Com o objetivo de homogeneizar os procedimentos de construções geométricas que vinham sendo usados, DESCARTES lançou-se ao estudo dos antigos geômetras gregos. Nas obras de APOLÔNIO e MENAECMO se encontram os gérmens do conceito de coordenadas, as quais terão, na geometria analítica moderna, a função mediadora entre o concreto das figuras geométricas e o abstrato das formas algébricas e euclidianas.

DESCARTES, ao perceber a relação entre as coordenadas e as figuras a partir desse estudo que fez sobre APOLÔNIO, acaba unificando as expressões algébricas às formas concretas das figuras geométricas mediante a associação entre curvas e equações.

Em outras palavras: ele possibilitou a reinterpretação dos processos de construções geométricas dos gregos, utilizando-se da álgebra já totalmente desenvolvida na Renascença.

Tal reinterpretação, como se verá, se deu pela análise do problema das três ou quatro retas formulado, em aproximadamente 320 d.C., pelo matemático PAPUS de ALEXANDRIA em sua obra "Coleções" (BOYER 1974:135).

DESCARTES percebeu que as deficiências dos gregos residiam no fato deles não terem conseguido desenvolver processos algébricos que levassem a elaboração do cálculo para aprimoramento do estudo das figuras. Foi exatamente o fato de ter compreendido estes limites da geometria grega que levou DESCARTES a considerar a importância dos cálculos algébricos desenvolvidos em sua época.

Ele percebeu que a álgebra já plenamente desenvolvida e os métodos geométricos que vinham sendo desenvolvidos de forma cada vez mais heterogêneos se completavam, possibilitando um desenvolvimento mútuo.

Assim, graças aos instrumentos matemáticos de sua época, isto é, a álgebra desenvolvida na Renascença e os processos geométricos dos antigos, DESCARTES elabora os primeiros conceitos da geometria analítica.

O surgimento desses primeiros conceitos da geometria analítica retratarão uma fase do desenvolvimento da matemática em que é possível haver uma superação da dicotomia entre o concreto das figuras geométricas e o abstrato das expressões algébricas (na sua interação com os conceitos euclidianos).

No entanto, antes da análise do momento histórico da síntese entre os processos algébricos e geométricos, é necessário que se entenda a própria gênese dos processos algébricos até sua transformação em instrumento de investigação dos processos geométricos. A análise histórica dos aspectos essenciais da relação abstrato-concreto na geometria analítica chega, portanto, ao seu segundo momento.

II.3- A gênese dos procedimentos algébricos: do atrelamento à figura ao seu processo de autonomia pela relação de dicotomia dos procedimentos geométricos.

O desenvolvimento tardio da álgebra face ao enorme desenvolvimento da geometria entre os gregos, se deu porque a estrutura lógica da formação dos conceitos algébricos exigiria uma linguagem simbólica satisfatória para a representação das propriedades implícitas do cálculo aritmético.

Mas isto só era possível em uma matemática, cujo sistema de numeração fosse flexível a tal ponto que propiciasse a superação do estágio inicial de registro de contagem e operacionalização por instrumentos concretos como o ábaco na representação das operações por algoritmos.

É através do constante aperfeiçoamento dos algoritmos que cria-se as condições para uma representação das leis operatórias ai implícitas.

Porém, a interpretação das leis operatórias implícitas nos algoritmos levaria necessariamente a um desenvolvimento cada vez mais dinâmico dos símbolos utilizados para representação dessas leis.

Sendo assim, o desenvolvimento da álgebra vai apresentar etapas caracterizadas por uma progressiva evolução de sua linguagem.

Segundo BOYER(1984:132), essas etapas podem ser classificadas em três:

O primeiro estágio é o retórico ou primitivo referindo-se a trabalhos em que a linguagem algébrica é totalmente representada por palavras. Não há qualquer indício de representação simbólica.

O segundo estágio é denominado sincopado. É um estágio intermediário para um estágio de maior abstração. A álgebra sincopada traz um avanço em relação ao retórico porque apresenta algumas abreviações para quantidades e operações constantemente presentes no raciocínio.

O terceiro e último estágio é denominado de estágio simbólico. As regras já são escritas por letras e sinais operativos apresentando um dinamismo no raciocínio efetuado. O exemplo máximo é a nossa álgebra moderna.

Essas etapas ao retratarem a evolução da álgebra, por outro lado, evidenciam sua vinculação com a geometria. Isto porque no transcorrer desta evolução, a geometria enquanto representação concreta através de suas figuras, servirá como um reforço momentâneo para a representação dos resultados algébricos até então obtidos arduamente pela carência de uma linguagem simbólica flexível.

Desta forma, percebe-se que em certo momento, o desenvolvimento algébrico se caracterizará por etapas que evidenciarão sua vinculação com as formas concretas das figuras geométricas até sua independência destas, através de sua elaboração enquanto um instrumento matemático próprio.

Essas considerações se fazem presentes a partir dos gregos. O tratamento geométrico ao ser uma saída satisfatória do problema da incomensurabilidade, não deixou de refletir implicitamente em sua estrutura lógica a limitação dos números naturais na análise das grandezas contínuas. Tanto é assim que o estudo dos números ficaram restritos às considerações possíveis ao emprego dos números naturais. As entidades suscetíveis de medida ficaram bem caracterizadas pelas condições ilimitadas do tratamento geométrico, quer sejam grandezas comensuráveis ou incomensuráveis. O sub-item a seguir esclarece o desenvolvimento dos trabalhos aritméticos e algébricos entre os gregos.

II.3.1- Os trabalhos aritméticos e algébricos presentes entre os gregos: dos "Elementos" de EUCLIDES aos trabalhos de HERON de Alexandria, NICÔMACO de Gerasa e DIOFANTO;

Os trabalhos aritméticos que se seguiram, ocorreram sob a óptica da geometria, sendo os números representados por segmentos.

Os livros VII, VIII e IX dos "Elementos" de EUCLIDES perfazem o estudo dos números inteiros quanto a classificação entre ímpares, pares, primos, planos (números como produto de dois números inteiros), sólidos (números como produto de três números inteiros), teoria da divisibilidade e resultados esporádicos de progressão aritmética.

Alem desses livros cabe ressaltar o livro II sobre álgebra geométrica e o livro V referente a teoria das proporcionais de EUDOXUS.

Conforme já dito, o estudo numérico de grandezas contínuas exigiria uma ampliação do campo numérico para além das limitadas considerações dos números naturais. Mas isto conseqüentemente, levaria a uma desvinculação da representação geométrica para o cálculo, pois, desta ampliação, se teria a elaboração de condições próprias para um tratamento eficaz.

Mas esta ampliação necessariamente estaria associada a condições econômico-sociais do povo grego que exigiriam uma maior prática do cálculo e, como conseqüência, o aprimoramento de sua representação.

Dentre os fatores mais apontados que explicam o não aprimoramento do cálculo, há o fato que até a época grega, sua cultura institucionalizara preceitos contrários a técnicas manuais o que gerou um desprezo pelas técnicas de cálculo (a logística).

Dadas essas condições, o cálculo aritmético existente era apropriado para o registro de contagem e não para o cálculo propriamente. Estes eram possivelmente efetuados em ábacos sem possibilidade de sua representação por algoritmos (cabe aqui esclarecer que na bibliografia utilizada não foi encontrada referências explícitas ao fato dos gregos utilizarem ábacos).

Mas mesmo sem a ampliação do campo numérico, os primeiros trabalhos algébricos seriam possíveis desde que houvesse uma superação da representação geométrica.

A álgebra exigiria um novo conceito de número por apresentar um estudo em um nível de abstração maior. Os primeiros resultados algébricos seriam possíveis a partir de uma interpretação das operações formais abstraindo sua estrutura lógica pela consideração de número enquanto uma entidade abstrata desprovida de sua representação concreta.

Desta forma, percebe-se que a consideração de número enquanto entidade abstrata é impossível na época de EUCLIDES porque os números eram atrelados a sua representação geométrica específica. VERA (1946:60) observa:

> Para esto era necessário prescindir del número como medida y esencia de las cosas materiales; despojarlo de su condición limitada haciendo de él algo indeterminado y general, sin contornos recortados como silueta a contraluz, y desconcretizarlo suprimiendo todo resabio estereometrico; en una palavra, superar el concepto de número previa su destrucción como magnitud dando de lado todas las especulaciones pitagóricas y platónicas. Pero ningún griego de la antigüedad clásica podía aceptar la idea de un número indeterminado porque esta idea tenía que desgarrar todo ropaje geométrico, y la Geometría - estática y estatuaria, inflexible y encorsetada - no podía respirar a pleno pulmón porque era la expresión matemática de una atmósfera social anquilosada por el confinamiento a que la sometía la obsesión del ágora como aposento - la polis finita - donde todo estaba sujeto a metron: mensura y limitación.
>
> (Para isto, era necessário prescindir do número como medida e essência das coisas materiais; despojá-lo da sua limitada condição fazendo dele algo indeterminado e geral, sem contornos recortados como silueta a contraluz, e desconcretizá-lo suprindo todo ranço estereométrico; em outra palavra, superar o conceito de número previa sua destruição como magnitude dando de lado todas as especulações pitagóricas e platônicas. Mas nenhum grego da antigüidade podia aceitar a idéia de um número indeterminado porque esta idéia teria que desgarrar toda a roupagem geométrica, e a Geometria - estática e estatuária, inflexível e encorsetada - não podia respirar a pleno pulmão porque era e expressão matemática de uma atmosfera social ancilosada pelo confinamento que a submetia a obcessão do ágora com o aposento - a polis finita - de onde tudo estava sujeito a medida: mensuração e limitação.)

Os primeiros trabalhos algébricos entre os gregos só surgiriam com HERON de Alexandria (+- 50 a.C. a 50 d.C.), NICÔMACO de Gerasa (+- 50 a 100 d.C.) e DIOFANTO (segunda metade do século III).

Observa-se quão distante está da época clássica grega de EUCLIDES (século III a.C.) e de APOLÔNIO (século II a.C.).

Nesse novo período histórico, as condições sócio-econômicas e culturais eram adversas da época clássica grega. Trata-se do período em que a Grécia é reduzida a província romana e, como tal, os romanos pela sua constituição sócio-politica de império conquistador, determinaram um tratamento utilitário para a ciência de forma a privilegiar o progresso tecnológico. Daí, os progressos atingidos pelo desenvolvimento da astronomia, geografia, arquitetura, óptica e mecânica (VASCONCELOS,s/d:421).

As conseqüências desses fatos para a matemática foram o impulso dado aos trabalhos aritméticos e geométricos com fortes influências dos textos babilônios e egípcios. Tais influências justificam-se já que esses povos apresentavam uma produção matemática que privilegiava técnicas operatórias em detrimento dos aspectos teóricos implícitos exigidos.

Nessa época a geometria diferencia-se da geometria clássica grega de características puramente racionais. Trata-se de uma geometria inteiramente prática denominada de geodésia em que HERON é um de seus representantes (BOYER 1974:124).

Nessa fase de produção matemática, há uma despreocupação com os aspectos teóricos dos conceitos e uma livre utilização dos números para medidas de comprimentos, áreas e volumes.

Com relação aos trabalhos de HERON, observa-se os procedimentos algébricos utilizados. Eram uma extensão da aritmética e elaborados de forma independente da geometria.

Já em sua outra obra, a "Geometrica", HERON translada muitos resultados da álgebra-geométrica grega para procedimentos aritméticos e algébricos (KLINE,1972:136).

A representação das operações aritméticas ocorriam sem nenhuma espécie de símbolos através de uma verbalização retórica. Ele não efetuava demonstrações, mas tão somente descrevia as operações necessárias.

Após HERON, destaca-se NICÔMACO de Gerasa com sua obra "Introdução à Aritmética". É o primeiro livro relativamente extenso de aritmética no sentido da teoria dos números em que se vê um tratamento independente da geometria.

Segundo VASCONCELOS (s/d:458) era um livro destinado aos estudantes de filosofia. Apresentava as propriedades e divisões dos números segundo os métodos pitagóricos e platônicos. Constituía-se de teoremas sem demontrações, através de verificações numéricas das proposições expostas.

Sua forma de exposição, através de verificações numéricas e apresentação espacial de números por pontos (os números figurativos pitagóricos) apesar de simplista, afastava-se da forma aritmético-geométrica euclidiana. Porém, todas suas operações eram escritas de forma bem detalhada. Apresentava uma linguagem algébrica retórica.

Se a obra de NICÔMACO possuía uma forma simplista, o mesmo não se pode dizer da obra "Aritmética" de DIOFANTO. Este, além de também desvincular-se da forma algébrico-geométrica euclidiana, apresentava um alto grau de habilidade matemática .

A inovação de DIOFANTO está na construção de uma linguagem sincopada apropriada para as operações envolvidas.

Embora rudimentar, determina uma nova etapa em relação a trabalhos anteriores, como o de NICÔMACO.

Segundo BOYER (1974:132):

> Representa essencialmente um novo ramo e usa um método diferente. Desvinculado dos métodos algébricos [entenda-se a álgebra-geometria euclidiana - JRBG], assemelha-se à álgebra babilônica em muitos aspectos; mas enquanto que os matemáticos babilônios se ocupavam principalmente com soluções aproximadas de equações determinadas de até terceiro grau, a Arithmetica de Diofante (tal como a temos) é quase toda dedicada à resolução exata de equações tanto determinadas [sistemas de equações com o mesmo número de incógnitas - JRBG] quanto indeterminadas [sistemas de mais equações que incógnitas - JRBG].

BOYER (1974:133) prossegue fazendo uma referência a linguagem adotada por DIOFANTO:

> Nos seis livros preservados da Arithmetica há um uso sistemático de abreviações para potências de números e para relações e operações. Um número desconhecido é representado por um símbolo parecido com a letra grega ξ (talvez como última letra de arithmos); o quadrado disto aparece como Δ^{γ} , o cubo como K^{γ} , a quarta potência dita quadrado-quadrado, como $\Delta^{\gamma}\Delta$, a quinta potência como ou quadrado-cubo, como ΔK^{γ} , e a sexta potência ou cubo-cubo como $K^{\gamma}K$. Diofante naturalmente conhecia as regras de combinações equivalentes a nossas leis sobre expoentes, e tinha nomes especiais para os recíprocos das seis primeiras potências das incógnitas, quantidades equivalentes às nossas potências negativas. Coeficientes numéricos eram escritos depois dos símbolos para as potências a que estavam associados; a adição de termos era indicada por justaposição adequada dos símbolos para os termos, e a subtração representada por uma abreviação de uma só letra colocada antes dos termos a serem subtraídos.

O fato de DIOFANTO considerar potências maiores que três reflete uma inovação que, segundo KLINE(1974:139), é muito mais extraordinário que o uso de símbolos. Isto porque, como KLINE observa, os gregos na época de EUCLIDES não podiam determinar um produto de mais de três fatores porque não havia um significado geométrico para tal. Desta forma, percebe-se que a base do raciocínio de Diofanto é puramente aritmética.

Mas apesar do tratamento aritmético (não há qualquer recurso à geometria para suas afirmações), DIOFANTO não apresenta um método geral de investigação. Seu trabalho compreende 189 problemas, cada qual interpretado de forma diferente dos demais. Não há uma generalização algébrica dos aspectos aritméticos envolvidos e seu avanço, quanto às técnicas aritméticas dos babilônios, está no uso de símbolos e no tratamento de equações indeterminadas (KLINE,1972:143).

DIOFANTO, apesar de sua linguagem sincopada, não conseguiu graus maiores de abstrações devido a representação do sistema de numeração presente em suas reflexões. Para maiores abstrações era necessário uma representação mais dinâmica. A notação era seu entrave.

É interessante retomar esta questão.

O sistema de numeração adotado por DIOFANTO, sistema este vigorado desde EUCLIDES, era o sistema jônio ou alfabético (rever figura 02).

Anterior ao sistema jônio, os gregos utilizavam o sistema numérico denominado ático (cf.BOYER,1974:43).

Embora possuísse muito menos símbolos que o sistema de numeração ático, o sistema jônio não deixou de apresentar dificuldades no seu uso para cálculos mais elevados. Além disso, as operações aritméticas efetuadas se davam de tal forma que números e letras apareciam com mesmos símbolos.

Diante de tais dificuldades, as operações eram elaboradas mediante o recurso de ábacos e tábuas de contar. O sistema de numeração bem servia para a contagem e registro dos cálculos (seus resultados) mas a operacionalização não era escrita.

O desenvolvimento da álgebra para além do trabalho de DIOFANTO só seria possível diante de um sistema de numeração que propiciasse um desenvolvimento da aritmética, de tal forma que desvinculasse da necessidade de representação concreta por instrumentos de registros. O grau de abstração presente em DIOFANTO é o máximo possível diante das limitações do sistema de numeração grego.

O que é curioso nestas considerações, é que o sistema de numeração adequado estaria sendo elaborado se houvesse uma assimilação da lógica operatória contida no ábaco. Bastaria assimilar o sistema posicional aí implícito, e isto demonstraria a possibilidade de uma representação mínima para os números (DUARTE,1987:59).

Tal representação se daria com apenas nove símbolos, pois quaisquer números estariam sendo suficientemente representados por seus algarismos de acordo com sua posição nas fileiras do ábaco.

Porém, a maior dificuldade estaria na representação de um número em que uma coluna do ábaco estivesse vazia. Era necessário representar o sistema posicional com um símbolo próprio para esse caso (o zero). Os exemplos abaixo (figuras 37a, b, c e d) configuram essas considerações:

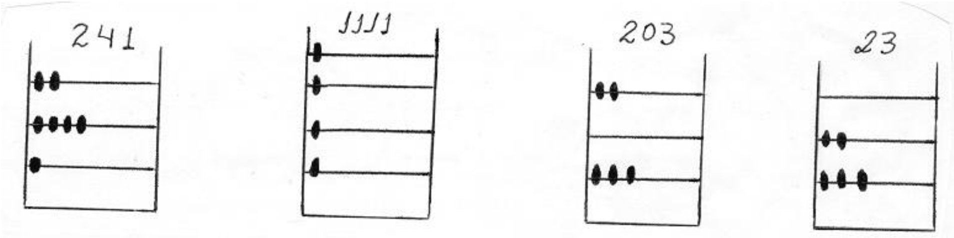


fig. 37a fig. 37b fig. 37c fig. 37d

Através da elaboração de tal sistema de numeração seriam dadas as condições objetivas para o desenvolvimento da aritmética, e, conseqüentemente, da álgebra.

E isto veio a ocorrer entre os hindus, e posteriormente, entre os árabes.

II.3.2- A contribuição dos trabalhos hindus e árabes

Impulsionados por relações comerciais bastante desenvolvidas, os hindus elaboraram o seu sistema de numeração que foi paulatinamente absorvido por outros povos.

O sistema posicional com o zero adotado pelos hindus data aproximadamente do século V d.C. Porém, isto representou um longo percurso que se seguiu a adoção deste sistema pelos árabes com seu aprimoramento e transmissão à Europa. Não cabe aqui maiores considerações sendo interessante aconselhar a leitura de IFRAH (1989:263).

As principais contribuições hindus para a matemática estão nos trabalhos elaborados por ARYABATA (475-550), BRAHMAGUPTA (+-598-660) e BHASKARA (+-1114-1185). Suas obras abrangem conhecimentos de astronomia, álgebra, aritmética e geometria.

Em relação ao enfoque dos trabalhos algébricos, BHASKARA se destaca, pois a apresentação de seus problemas têm soluções tanto na forma algébrica como na geométrica.

Porém, caberá aos árabes o maior impulso para o desenvolvimento da álgebra. Mas antes de se aprofundar esta questão faz-se necessário situá-la historicamente.

Em 762 os árabes orientais transformam Bagdá na capital do Império. Bagdá, em decorrência dos interesses científicos dos califas ALMANSOR (754), HARUM-AL-RASHID (786) e AL-MAMUM(813) adquire grande esplendor e torna-se um grande centro cultural, uma nova Alexandria (VASCONCELOS,s/d:591).

Através do incentivo desses califas, Bagdá atrai estudiosos de outras regiões (sábios gregos, persas e árabes), iniciando com ALMANSOR as primeiras traduções;

traduções de obras hindus facilmente trazidas, dada as relações comerciais bastantes desenvolvidas com a Índia (VASCONCELOS,s/d:593).

As traduções ganham maiores impulso com AL-MAMUM através da inauguração de uma "Casa da Sabedoria".

Entre os sábios presentes nesta "Casa da Sabedoria", cabe destacar o matemático e astrônomo Mohammed ibu-Musa AL-KHOWARIZMI.

Das várias obras de AL-KHOWARIZMI, duas referentes a aritmética e álgebra são por demais importantes: "Sobre a arte hindu de calcular" e "Al-jabr wa'l muqabalah".

A obra "Sobre a arte hindu de calcular" expõe o sistema de numeração hindu. Pela clareza de sua exposição, essa obra vai ser posteriormente muito traduzida na Europa, passando os números hindus a serem associados ao termo algorismi, originando assim, o termo “algorismo” ou “algoritmo”.

Quanto a "Al-jabr wa'l muqabalah", trata-se de uma obra de álgebra elementar. Apresenta exemplos de resoluções de equações de 1º, e principalmente, de 2º graus.

O próprio título da obra faz referência a procedimentos na resolução de equações. O termo "al-jabr" significa "restauração" ou "completação" referindo-se a transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação. O termo "muqabalah" refere-se a "redução" ou "equilíbrio" no sentido de simplificação pela redução a termos semelhantes (BOYER,1974:167).

Por exemplo na resolução de $5x + 10 = 2x + 37$ ressalta-se:

$5x + 10 = 2x + 37$

$5x = 2x + 37 - 10$ <=== "restauração" (o nº 10 do lado esquerdo da igualdade passou para o lado direito).

$5x - 2x = 27$ <=== de novo "restauração"

$3x = 27$ <=== seguido de uma "redução" (operou-se com os termos semelhantes, isto é, $5x - 3x$).

O que obtém-se $x = 9$.

A exposição dos procedimentos ocorre sem nenhuma sincopação. Até os números são escritos. Se quanto a DIOFANTO, a álgebra de AL-KHOWARIZMI apresenta uma volta ao estágio primitivo da linguagem algébrica, por outro lado, apresenta a vantagem de ser uma obra extremamente clara, de fácil assimilação e divulgação da álgebra.

Através de exemplos numéricos, AL-KHOWARIZMI expõe seis capítulos referentes a resolução de seis tipos de equações. Para isto, define as quantidades "raízes", "quadrados" e "números" sendo respectivamente x, x^2 e números quaisquer (BOYER,1974:167).

Porém, não se limita apenas a resolução de equações. Apresenta também regras para o produto de binômios na forma (x + a).(x + b) e (x - a)(x - b) (VASCONCELOS,s/d:595).

Na linguagem moderna, considerando x como variável e as letras a, b e c como números, as seis equações descritas por AL-KHOWARIZMI são:

Capitulo I: $ax^2 = bx$ ("quadrados iguais a raízes")

Capitulo II: $ax^2 = c$ ("quadrados iguais a números")

Capitulo III: $bx = c$ ("raízes iguais a números")

Capitulo IV: $x^2 + bx = c$ ("quadrados e raízes iguais a números")

Capitulo V: $x^2 + c = bx$ ("quadrados e números iguais a raízes")

Capitulo VI: $bx + c = x^2$ ("raízes e números iguais a quadrados")

AL-KHOWARIZMI reconhecia a existência de duas raízes desde que fossem reais e positivas.

Após um estudo detalhado dos procedimentos necessários para se obter as soluções, AL-KHOWARIZMI coloca a necessidade de os mesmos serem justificados pela interpretação geométrica.

A atitude de demonstrar geometricamente os resultados algébricos revela uma tendência que se tornou comum no decorrer do desenvolvimento dos processos algébricos.

Particularmente, quanto aos árabes, muitos autores atribuem esse fato a influência da matemática grega devido as traduções efetuadas de suas principais obras. KLINE (1972:193) comenta:

> Though the Arabs gave algebraic solutions of quadratic equations, they explained or justified their processes geometrically. Undoubtedly they were influenced by the Greek reliance upon geometrical algebra; while they arithmetized the processes, they must have believed that the proof had to be made geometrically.
>
> (Embora os árabes dessem soluções algébricas de equações quadráticas, eles explicavam ou justificavam seus processos geometricamente. Indubitavelmente eles foram influenciados pelos gregos a terem confiança na álgebra geométrica; embora eles tivessem aritmetizados os processos, eles devem ter acreditado que as provas tinham que ser feitas geometricamente.) (grifos nossos)

Mas a influência grega foi marcante não somente para os árabes. A estrutura lógica bem definida das demonstrações geométricas gregas induziria também os outros povos. Um exemplo disto, é o caso já comentado aqui, do matemático hindu BHASKARA.

O que se percebe, é que a perfeita formalização dos procedimentos geométricos levaria os algebristas a se respaldarem nestes procedimentos como um modelo para justificarem seus resultados algébricos esporádicos. Esse respaldo se dá porque a álgebra ainda não havia se constituído em instrumento matemático próprio, e por isso, a formação de seus procedimentos necessitavam se atrelar a representações concretas das figuras geométricas para se justificarem enquanto afirmações verdadeiras.

Essa tendência tornar-se-á comum ao longo do desenvolvimento algébrico de forma que o cálculo algébrico será visto inseparável de sua respectiva demonstração geométrica.

Evidencia-se aqui, o início de um processo muito interessante. Se por um lado, o desenvolvimento algébrico vai se dar até sua formação independente como processo próprio de investigação, por outro lado, a construção dessa autonomia se dará através de uma dicotomia com os procedimentos geométricos.

Dicotomia, porque as proposições geométricas serão utilizadas como mero critério de confirmação, de veracidade das proposições algébricas. Desta forma, álgebra e geometria se desenvolverão juntas ao longo da história da matemática, porém, lado a lado, dicotomizadas. A superação dessa dicotomia, como se verá, se dará com DESCARTES e FERMAT, quando os procedimentos algébricos atingirão um nível altíssimo de elaboração chegando a solucionar problemas de geometria (VASCONCELOS,s/d:595).

Voltando a AL-KHOWARIZMI, suas equações de 2ºgraus são demonstradas conservando o aspecto lógico da demonstração geométrica grega.

Por exemplo, para justificar a solução da equação $x^2 + 10x = 39$ (equação do capitulo IV : "quadrados e raízes iguais a números") AL-KHOWARIZMI se baseia na Proposição 4 do livro II dos Elementos de EUCLIDES (1945:55) aqui reproduzida:

> Se uma linha reta for cortada em duas partes quaisquer, será o quadrado da toda igual aos quadrados das partes, juntamente com o retângulo das mesmas partes, tomado duas vezes.

Essa proposição euclidiana está representada pela figura 38.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

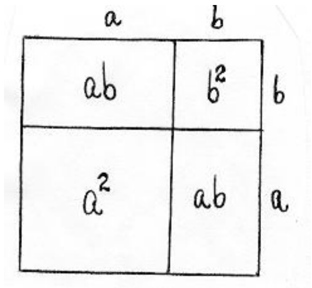


fig.38

Segundo HOGBEN (1956:332) AL-KHOWARIZMI assim procede:

- considera o segmento de reta com extremos A e B com x unidades de comprimento, sendo x a solução procurada.

- constrói o quadrado ABCD de lado x (figura 39).

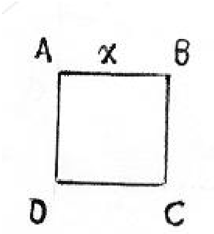


fig.39

- estende os lados AB e BC respectivamente até E e F de modo que AE = CF = 5 (figura 40)

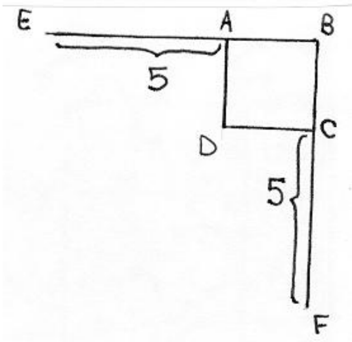


fig.40

- completando os retângulos ADGE e DCFH obtém-se as áreas A_1, A_2 e A_3 representadas na figura abaixo (figura 41)

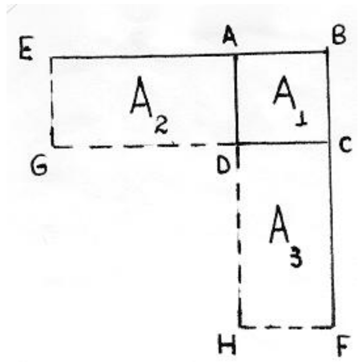


fig.41

Tem-se $A_1 = x^2$, $A_2 = 5x$ e $A_3 = 5x$

- a área da figura em L formada pelos três retângulos é dada por $A_1 + A_2 + A_3$, isto é, $x^2 + 5x + 5x$

- mas $x^2 + 5x + 5x = x^2 + 10x$ é o lado esquerdo da equação.

- completando o quadrado DHIG tem-se $A_4 = 5^2 = 25$ (figura 42)

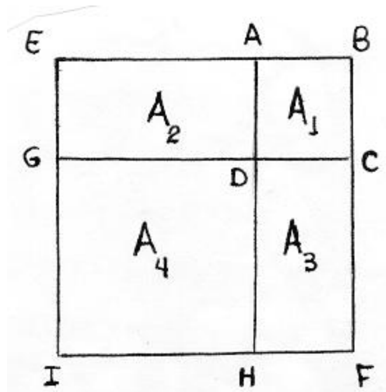


fig.42

- a figura em L tem área $x^2 + 10x$. Mas pela equação $x^2 + 10x$ é igual a 39.

- o quadrado DHIG tem área 25.

- o quadrado maior BFIE terá área $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, isto é, $x^2 + 10x + 25$. Mas antes, $x^2 + 10x = 39$. Portanto

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$x^2 + 10x + 25 = 64$$

- o quadrado maior BFIE tem lado EB = 8. Mas EA = 5, e portanto, necessariamente AB = x = 3 , a solução da equação.

Após AL-KHOWARIZMI, é interessante comentar o trabalho de Omar KAYYAM (aproximadamente 1050-1122).

Segundo BOYER (1974:175), KAYYAM também dava soluções tanto aritméticas como geométricas para equações do 2ºgrau. Porém, sua maior contribuição estava nas equações cúbicas.

Por acreditar erroneamente ser impossível obter soluções aritméticas para equações cúbicas, KAYYAM obtinha soluções geométricas através de secções cônicas.

BOYER explicita seu procedimento pelo tratamento moderno:

Considerando a equação cubica $x^3 + ax^2 + b^2 x + c = 0$ e substituindo x^2 por 2py na equação obtém-se

$xx^2 + ax^2 + b^2 x + c^3 = 0$

$x2py + a2py + b^2x + c^3 = 0$

$2pxy + 2apy + b^2 x + c^3 = 0$

A equação acima representa uma hipérbole, mas a igualdade $x^2 = 2py$ representa uma parábola.

Sendo assim, na busca das soluções da equação considera-se o sistema simultâneo de equações:

$x^2 = 2py$

$2pxy + 2apy + b^2x - c^3 = 0$

O que leva ao traçado, num mesmo eixo de coordenadas, da parábola e da hipérbole com abcissas dos pontos de intersecção das duas curvas sendo as raízes da equação cúbica.

Pelas considerações aqui expostas, é importante ressaltar que a grande contribuição dos trabalhos árabes, foi dar o primeiro passo para que um dia fosse possível captar a íntima relação existente entre os processos algébricos e geométricos.

O que lhes faltou foi exatamente não ter desenvolvido um simbolismo que substituísse a forma retórica e, com isto, pudesse desvincular da forma concreta das figuras geométricas.

Percebe-se no desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos, que as formas geométricas foram decisivas para formação dos conceitos algébricos abstratos, mas que por outro lado, levaram a um retardamento da elaboração dos símbolos algébricos. O concreto das figuras geométricas foi avanço e entrave para o abstrato das expressões algébricas.

Após AL-KHOWARIZMI e KHAYYAM surgiria no Oriente e na Espanha muitos algebristas cujas obras passariam a Europa através de versões latinas.

É importante observar que enquanto no Oriente houve florescimento científico o mesmo pouco se deu na Europa, pois sua produção científica praticamente estacionara entre os séculos IV e X.

Neste período, a Igreja pelo poder exercido em toda Europa, compila toda e qualquer produção científica reservando aos mosteiros e conventos os únicos lugares do saber.

É somente por volta de 1100, com o advento das Cruzadas que ocorre uma aproximação entre Oriente e Ocidente, vindo os europeus a adquirirem maiores contatos com os trabalhos gregos, hindus e árabes.

O século XII na Europa é marcado pelas sucessivas traduções latinas de obras árabes. Entre esses tradutores destacam-se Gerardo de CREMONA e Robert de CHESTER . É de Robert de CHESTER a primeira tradução, feita em 1145, da "Álgebra" de AL-HOWARIZMI (BOYER 1974:184).

No fim do século XII muitas universidades foram fundadas propiciando bases sólidas necessárias para os progressos científicos que se seguiriam nos séculos XIII e XIV com produção matemática se concentrando-se nas escolas da Inglaterra e França.

Porém, já no século XIV, com o advento da peste e da Guerra dos Cem Anos envolvendo esses dois países, o declínio cultural foi inevitável. A retomada na pesquisa matemática se dará no século XV nas universidades italianas, alemães e polonesas. Os séculos XVI e XVII serão os séculos de grande produção científica em toda Europa (BOYER,1974:195).

O próximo sub-item analisa o desenvolvimento da álgebra desse período na Europa.

II.3.3- A álgebra na Europa: as traduções das obras árabes e hindus, o aprimoramento da simbologia algébrica.

Sobre o desenvolvimento da álgebra na Europa, destaca-se inicialmente a obra "Liber abaci" de Leonardo de PISA (1180-1250) mais conhecido como FIBONACCI. FIBONACCI apresenta metodos algébricos com utilização de numerais indo-arábicos divulgando uma interligação necessária entre álgebra e geometria. Porém, nesta obra há predominância de cálculos numéricos com muito pouca consideração a geometria (BOYER 1974:185).

A relação entre álgebra e geometria em FIBONACCI é muito mais aprofundada em sua outra obra "Practica geometriae" publicada em 1220, repetindo o procedimento babilônio e árabe de usar álgebra na resolução de problemas geométricos (BOYER 1974:187).

Em SMITH(s/d:320) encontra-se a afirmação de que FIBONACCI usa álgebra na solução de problemas geométricos relativos a área de um triângulo.

Com Jordanus NEMORARIUS (aproximadamente 1200) em sua "Arithmetica" aparece uma primeira generalização de teoremas algébricos gerais com uso de letras em vez de numerais para os números (BOYER,1974:188).Observa-se paulatinamente o desenvolvimento algébrico se distanciando de suas interpretações restritas a casos numéricos específicos para corporificação em estrutura independente.

O aperfeiçoamento algébrico significará aperfeiçoamento de sua linguagem sincopada. Neste contexto encontram-se os trabalhos de Nicolas CHUQUET (morreu proximadamente em 1500) com sua "Triparty en la science de nombres"; Luca PACIOLI (1445-1514) com sua "Suma de arithmetica, geometriea, proportioni et proportionalita" (BOYER,1974:202); Rafael BOMBELLI (aproximadamente 1526-1573) com sua "Álgebra" e Robert RECORDE (1510-1558) com seu "Whetstone of Witte" (BOYER,1974:210).

É importante observar que o aperfeiçoamento da linguagem sincopada se deu envolto a linguagem retórica. Por exemplo, em Nicolas CHUQUET as operações fundamentais adição, subtração, multiplicação e divisão eram as palavras plus, moins, multiplier par e partya par (BOYER,1974:202).

A sincopação foi conseqüência natural da abreviação das palavras retóricas. Tanto é assim que as letras p e m utilizadas na Itália indicavam as palavras referentes a adição e subtração. Em Rafael BOMBELLI encontra-se a equação 1Zp.5Rm.4 referindo-se a 1zenus plus 5 res minus 4, isto e, $x^2 + 5x - 4$ (BOYER,1974:210). O mesmo se deu com PACIOLI, pois ele utilizava os termos co, ce, al referentes a cosa (incógnita), censo (quadrado da incógnita) e alqualis (igual) (BOYER,1974:203).

No seio da sincopação há a elaboração simbólica. BOMBELLI apresentou a mesma equação 1Zp.5Rm.4 (isto é, $x^2 + 5x - 4$) como 1p.5 m.4. Isto quer dizer que x, x^2, x^3 aparecia, segundo BOMBELLI assim: 1 , 2 e 3. Antes de BOMBELLI, CHUQUET em 1484 apresentou a notação exponencial 12^3, 10^5 ,120^8 e 7^{1m} para $12x^3$,$10x^5$,$120x^8$ e $7x^{-1}$ (KLINE,1980:260). Robert RECORDE apresentou pela primeira vez o sinal de igualdade tal como hoje conhecemos, porém, era um tanto mais comprido do que a forma usual

(BOYER,1974:211). Os símbolos + e - foram introduzidos pelos alemães no decorrer do século XV (KLINE,1980:259).

A maior contribuição para a passagem da linguagem sincopada para a simbólica foi dada por François VIÈTE(1540-1603) , e posteriormente René DESCARTES (1596-1650).

Influenciado pelas obras dos antigos matemáticos gregos, particularmente de DIOFANTO, François VIÈTE em sua obra "In Artem Analyticam Isagoge" publicada em 1591, teve a idéia de utilizar letras no lugar de números específicos. Sua inovação não estava simplesmente na utilização de letras, já que vários matemáticos apresentavam alguma utilização. Sua inovação estava na forma da utilização dessas letras. Não era, como os demais autores, esporádicas restringindo a representação de variáveis e potências de variáveis. Era sim, sistematizada, apresentando coeficientes gerais.

Para esses coeficientes gerais, VIÈTE procedia pela representação de consoantes para quantidades conhecidas e vogais para as quantidades desconhecidas.

Com isto, VIÈTE fez clara distinção entre álgebra simbólica e numérica o que denominava respectivamente de "logistica speciosa" e "logistica numerosa" (BOYER,1974:224).

Dessa distinção, a grande contribuição de VIÈTE se deu pelo avanço da álgebra para além das restritas considerações de casos numéricos específicos. A álgebra ganharia em generalização, passando ao estudo de classes inteiras de equações.

Com essa generalização, a álgebra refletiria em sua estrutura lógica um processo analítico de investigação constituindo-se em "arte analítica" no dizer do próprio VIÈTE.

É importante compreender que quando se considera a obra de VIÈTE como um marco do inicio da linguagem simbólica, se está referindo a seu estudo generalizador de casos algébricos até então específicos. Portanto, não se pode considerar seu trabalho como puramente simbólico; muito pelo contrário, sua obra também apresentava uma álgebra sincopada com palavras e abreviações.

A partir dai, VIÈTE utiliza seus conhecimentos algébricos como instrumento eficaz para resolução de problemas de construções geométricas. Esse procedimento demonstra uma profunda admiração pela geometria antiga. Para VIÈTE, sua álgebra tinha um sentido de renovação a partir de um reentendimento dos procedimentos geométricos dos antigos.

KLINE (1972:261) aponta a influência de DIOFANTO (a obra "Arithmetica") e de PAPUS (o livro VII das "Coleções Matemáticas").

BOYER (1974:225) observa em VIÈTE uma aproximação com a geometria, mas num nível não elementar como em muitos algebristas anteriores. Era significativo em VIÈTE a nova tendência de associar a nova álgebra avançada com a antiga geometria avançada referindo-se a APOLÔNIO e PAPUS.

O desenvolvimento da álgebra até VIÈTE apresenta uma relação de dependência com a geometria. Os trabalhos algébricos que se sucederam na Europa entre os séculos XVI e XVII apresentaram a lenta passagem da linguagem sincopada para o início da simbólica culminando com a construção lógica da estrutura própria da álgebra.

No interior deste processo, a relação abstrato e concreto se fez presente inicialmente por uma dependência das proposições algébricas abstratas com relação ao concreto das figuras geométricas. Relação esta que se inverte com VIÈTE e depois com DESCARTES.

De fato, até o transcorrer de todo século XVI, e parte do século XVII, o raciocínio algébrico se deu pela sua justificativa geométrica. A dependência da álgebra à geometria se dava pela heterogeneidade de cálculos algébricos a casos específicos. Na falta de métodos algébricos gerais, a eficácia da demonstração geométrica justificava o cálculo algébrico. O atrelamento das expressões algébricas abstratas ao concreto das figuras geométricas era uma condição necessária para o desenvolvimento algébrico. Daí, a existência da pluralidade de provas geométricas de regras algébricas.

Com VIÈTE há o inicio da inversão desta dependência. A álgebra, agora munida de procedimentos gerais, passa a auxiliar na resolução de procedimentos geométricos, quer dizer, o uso da álgebra possibilitaria a sistematização da diversidade dos procedimentos geométricos. A desvinculação das figuras geométricas concretas por parte das formas algébricas abstratas passa a ser possível, de tal forma que as abstrações algébricas passam a uniformizar as construções geométricas pela captação de suas propriedades intrínsecas até então inacessível pela uso restrito das figuras geométricas. Começa a ser dado as condições para o surgimento da geometria analítica.

II.4- A geometria analítica em DESCARTES e FERMAT: o momento da síntese entre os processos algébricos e geométricos.

A análise do terceiro e último momento desse capítulo se iniciará pela obra de DESCARTES.

Os fundamentos da geometria analítica apresentados por René DESCARTES (1596 - 1650) encontram-se no terceiro apêndice da sua obra "O Discurso do Método - Para Bem Conduzir a Razão e Buscar a Verdade nas Ciências" publicada em 08 de junho de 1637. Trata-se do apêndice intitulado "Geometria".

Todos os apêndices apresentados no Discurso do Método ("Dioptrica", "Meteoros" e "Geometria") são apresentados enquanto uma aplicação do método de investigação filosófica proposto pelo autor.

Porém, é bom ressaltar, que muitas das idéias contidas no "Discurso do Método" é fruto de reflexões já anteriormente exposta na obra "Regras para Direção do Espírito" de 1628.

A idéia de DESCARTES de unificar os processos algébricos e geométricos se dá em decorrência de suas idéias filosóficas. Assim, neste trabalho, antes de esmiuçar seus procedimentos matemáticos que lançaram as bases para geometria analítica, optou-se, em primeiramente caracterizar seus pressupostos filosóficos que geraram sua inovadora interpretação da matemática .

A preocupação filosófica de DESCARTES está na resolução do problema da verdade e na validade do conhecimento. Ao abordar as Ciências DESCARTES percebe a força das verdades matemáticas diante das incertezas oriundas das várias opiniões presentes na filosofia. É a partir dai que DESCARTES analisa a possibilidade de um método universal sobre bases filosóficas que oferecesse a todas as Ciências as mesmas certezas e evidências presentes na matemática .

Diante disto, DESCARTES busca retirar das "matemáticas" e da filosofia o melhor para elaboração de seu método. Mas sem antes observar defeitos presentes nestas três "Ciências".

Aqui é necessário esclarecer que o termo "matemáticas" refere-se a "análise geométrica" e "álgebra", isto é, respectivamente os métodos geométricos dos antigos e a resolução de equações.

Quanto à lógica, isto é, a filosofia, DESCARTES (s/d:64) afirma:

> os silogismos e a maior parte das outras instruções, mais do que para ensinar, servem para explicar a outrem as coisas que se sabem ou, até, como a arte de Lullo, para falar irreflectidamente do que se ignora. E, embora ela contenha muitos preconceitos cheios de verdade e de utilidade, existem todavia outros, à

> mistura, prejudiciais ou supérfluos, quase tão difíceis de separar dos primeiros como tirar uma Diana ou uma Minerva dum bloco de mármore ainda não esboçado.

Quanto às "matemáticas" (DESCARTES,s/d:64):

> Quanto a análise dos antigos e à álgebra dos modernos, além de apenas compreenderem matérias muito abstractas e que não parecem de qualquer utilidade, a primeira está sempre tão ligada à considerações das figuras que não consegue exercitar o entendimento sem fatigar bastante a imaginação; na segunda, estamos de tal modo submetidos a certas regras e cifras que se fez dela uma arte confusa e obscura que embaraça o espirito, em vez duma ciência que o cultive.

O parâmetro para distinção do melhor de cada ciência, englobando-as, se fará por um movimento de pensamento que capte cada elemento em si, mas dentro de uma perspectiva de conjunto. Em outras palavras, DESCARTES propõe a elaboração do conhecimento se dando por relações. Aqui o emprego da palavra "relação" está no sentido exposto por PRADO (1952:233) como sendo

> a existência concomitante e simultânea de termos que existem um no outro e não separadamente; e devem por isso ser apreendidos por uma operação única do pensamento.

É assim que DESCARTES enuncia quatro pressupostos básicos para condução do pensamento por relações. Nas próprias palavras de DESCARTES (DESCARTES,s/d:65):

> O primeiro era o de jamais receber por verdadeira coisa alguma que não conhecesse evidentemente como tal: isto é, o de evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção; de não compreender nada mais nos meus juízos senão o que se apresentasse tão claramente e tão distintamente ao meu espírito que não teria qualquer ocasião de o pôr em dúvida.
> O segundo, o de dividir cada uma das dificuldades que eu examinasse em tantas parcelas quanto fosse possível e requerido para melhor as resolver.
> O terceiro, o de conduzir por ordem os meus pensamentos, começando pelos objectos mais simples e mais fáceis de conhecer, para subir pouco a pouco, como que por degraus, até ao conhecimento dos mais complexos, e supondo a existência de ordem entre aquelas que não se sucedem naturalmente uns aos outros.
> E o último, o de fazer sempre enumerações tão completas e revisões tão gerais que fique seguro de nada omitir.

Como observa RUBANO(1988:201) esses pressupostos refletem o próprio raciocínio matemático já que os três últimos pressupostos referem-se (pela ordem) às regras de análise, síntese e enumeração, tão fortemente presente nos quadros que compõem o raciocínio matemático.

Além disto, DESCARTES ao pensar por relações, passa a interpretar o mundo de uma forma matematizada, isto é, sob o aspecto quantitativo.

A visão de DESCARTES dos fenômenos da realidade se dá sem ênfase do aspecto qualitativo, já que para ele, é na relatividade das interpretações qualitativas originadas pelas sensações que persistem as dúvidas. A certeza das idéias claras e distintas estará se relacionando a forma de conhecimento evidente.

A esta forma de conhecimento enquadram-se os primeiros conceitos matemáticos.

Sendo assim, a matemática em DESCARTES se faz presente nos seus conceitos irrefutáveis que influenciam a busca de novas verdades, bem como na interpretação matematizada do mundo pela ênfase quantitativa.

Respaldados nos pressupostos lógicos que norteam a condução do pensamento por relações, DESCARTES reinterpreta a própria matemática . Este pensar por relações analisa "cada" matemática em si (a álgebra e a análise geométrica grega), mas dentro de uma perspectiva de conjunto globalizadora, que determina uma única visão de matemática .

Nas próprias palavras de DESCARTES (s/d:66):

> Não me propus, porém, esforçar-me, para tanto, por aprender todas essas Ciências particulares comummente chamadas matemáticas. Vendo que, embora sendo diferentes os seus objectos, elas não deixam de estar todas de acordo no facto de não considerarem senão as diversas relações ou proporções que aí se encontram, pensei que valesse mais examinar apenas essas proporções em geral e supô-las apenas no que servisse para me tornar o conhecimento mais fácil, inclusive sem as relacionar a nada, para, depois, melhor as poder aplicar a todas as outras coisas a que pudessem convir. Em seguida notei que, para as conhecer, precisaria, umas vezes, de as considerar cada uma em particular e, outras vezes, somente de as reter ou de compreender várias em conjunto. Por isso pensei que, para as considerar melhor em particular, as devia supor em **linhas**, uma vez que não encontrava **nada de mais simples ou que eu pudesse representar mais distintamente à minha imaginação e aos meus sentidos**. Mas, para as reter ou compreender várias em conjunto, importava que eu as explicasse **por algumas cifras**, o mais reduzidas que fosse possível. Por este meio, receberia da análise geométrica e da álgebra tudo o que têm de melhor e **corrigiria todos os defeitos de uma pela outra**. (grifos nossos)

Dessa citação percebe-se a utilização de uma geometria na sua forma quantificada. O auxilio à figura, pela clareza de sua constituição para aquisição do conhecimento se fará na sua expressão quantificada pela aplicação dos métodos algébricos.

Essa aplicabilidade dos métodos algébricos nos procedimentos geométricos é fruto de um processo de investigação em que não se prioriza apenas um pólo da relação entre os aspectos algébricos e geométricos utilizados. A geometria passa da sua expressão qualitativa para a quantitativa mediante o recurso algébrico e, reciprocamente, os mecanismos algébricos passam a ser melhor compreendidos em sua lógica pela adoção dos recursos geométricos.

É graças ao aspecto relacional intrínseco no modo de investigação de DESCARTES que elabora-se as primeiras noções da geometria analítica, noções estas, que refletem o equilíbrio entre as formas algébricas e geométricas.

Mas essas noções se dão mediante a utilização de processos algébricos já bem constituídos logicamente. Daí que, fazendo uma análise das idéias de DESCARTES, percebe-se com relativo destaque, uma certa admiração pelos últimos resultados algébricos de sua época. E DESCARTES vai mais além ao forjar uma interpretação de álgebra enquanto método para condução do raciocínio. Ele vê a álgebra como uma extensão da lógica e, por isso, passa a desvinculá-la da geometria eregindo-a em uma estrutura ordenada independente.

Para isso, DESCARTES inova no simbolismo algébrico aperfeiçoando o uso de VIÈTE das letras do alfabeto ao utilizar as primeiras letras para quantidades conhecidas, e as últimas letras para quantidades desconhecidas a maneira de hoje. Além disso, a "Geometria" apresenta uma notação tal que hoje pode ser facilmente lida à excessão do símbolo ∞ referente ao nosso sinal de igualdade = (BOYER,1974:248).

Essa interpretação da álgebra enquanto método para direcionar o raciocínio se faz na análise da geometria grega (no dizer de DESCARTES, a geometria dos antigos) mas não sob o absolutismo da visão algébrica. Conforme já visto, DESCARTES procurou retirar o melhor dos dois campos matemáticos. Daí que, o objetivo de seu método constitui-se de dois momentos (BOYER,1974: 249).

<u>O primeiro</u>, o de reduzir a diversidade das construções geométricas à uniformidade presente na ordenação algébrica.

<u>O segundo</u>, de se interpretar os conceitos algébricos através de seu significado geométrico.

Esses dois momentos, embora se mostrem como único (na medida que eles se relacionam como único), ao refletirem o aspecto relacional entre álgebra e geometria, demonstram um equilíbrio existente entre as formas concretas das figuras e as formas abstratas dos procedimentos algébricos. O aspecto relacional implícito para análise da geometria e da álgebra passa a ser possível a partir da construção da álgebra enquanto instrumento eficaz para investigação dos antigos procedimentos geométricos. É esta investigação que gera a quantificação das formas geométricas por meio da desvinculação de suas formas concretas.

Porém, é importante deixar claro que as idéias de DESCARTES são a nível dos fundamentos do que viria a ser denominado geometria analítica. Este termo é moderno e uma análise dos três livros que compõem o apêndice da "Geometria" demonstra uma aplicabilidade recíproca da álgebra e da geometria distante das características encontradas nos trabalhos modernos. BOYER (1974:251) afirma:

> não há nada de sistemático sobre coordenadas retangulares, pois ordenadas oblíquas são geralmente assumidas; portanto, não há fórmulas para distâncias, inclinação, ponto de divisão, ângulo entre duas retas, ou outro material introdutório semelhante. Além disso, em toda a obra não há uma única curva nova traçada diretamente a partir da equação, e o autor se interessava tão pouco por esboçar curvas que nunca entendeu completamente o significado de coordenadas negativas. Ele sabia de modo geral que as ordenadas negativas são orientadas em sentido oposto ao tomado como positivo, mas nunca usou abscissas negativas.

E mais, ainda no mesmo texto BOYER (1974:253) afirmaria:

> "La Geométrie" em seu tempo foi tanto um triunfo da teoria não-prática quanto "As Cônicas" de Apolônio na antigüidade, apesar do papel extraordinariamente útil que ambas viriam a desempenhar.

É necessário agora explicitar como se deu a apresentação das primeiras noções da geometria analítica ao longo da análise do apêndice "Geometria".

"Geometria" se compõem de três livros assim intitulados:

- Livro I : Problemas de Construções que exigem somente retas e circunferências

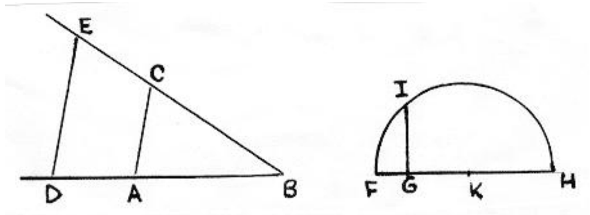
.

- Livro II : A Natureza das Linhas Curvas.

- Livro III : A Construção de Problemas Sólidos e Mais que Sólidos (no texto o termo é "supersoid").

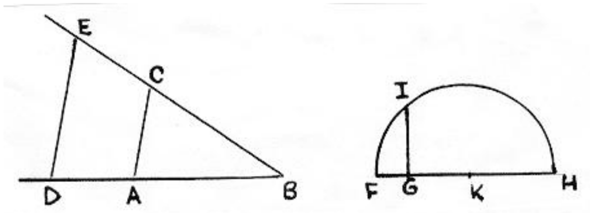
O Livro I inicia-se com uma representação geométrica das operações aritméticas através de simples construções com régua e compasso. Com isto, DESCARTES justificava a aplicação de elementos aritméticos na geometria. Por exemplo, para multiplicação e divisão, DESCARTES procedia da seguinte forma (DESCARTES,1952:295):

> For example, let AB be taken as unity, and let it be required to multiply BD by BC. I have only to join the points A and C, and draw DE parallel to CA; then BE is the product of BD and BC.



If it be required to divide BE by BD, I join E and D, and draw AC parallel to DE; then BC is the result of the division.

Por exemplo, seja AB tomada como unidade e seja exigido multiplicar BD por BC. Eu tenho somente que juntar os pontos A e C, e desenhar DE paralelo a CA; logo BE é produto de BD e BC.



Se for exigido dividir BE por BD, eu associo E e D, e desenho AC paralelo a DE; então BC é o resultado da divisão.

Da mesma forma, DESCARTES procedia para adição, subtração, bem como para extração de raízes quadradas.

Tais procedimentos refletem um recurso às construções geométricas dos antigos gregos.

Após as representações geométricas das operações aritméticas DESCARTES parte para uma aplicação da álgebra à geometria afirmando (DESCARTES,1952:296):

Often it is not necessary thus to draw the lines on paper, but it is sufficient to designate each by a single letter. Thus, to add the lines BD and GH, I call one a and the other b, and write a+b. Thend a-b will indicate that b is subtracted from a; ab that a is multiplied by b; a/b that a is divided by b; aa or a^2 that a is multiplied by itself; a^3 that this result is multiplied by a, and so on, indefinitely. Again, if I wish to extract the square root of $a^2 + b^2$, I write $\sqrt{a^2+b^2}$; if I wish to extract the cube root of $a^3 - b^3 + ab^2$, I write $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}$, and similarly for other roots. Here it must be observed that by a, b, and similar expressions, I ordinarily mean only simple lines, which, however, I name squares, cubes, etc., so that I may make use of the terms employed in algebra.

(Freqüentemente, não é necessário desta forma desenhar as linhas no papel, mais é suficiente designar cada uma por uma única letra. Desta forma, para associar as linhas BD e GH, eu faço um a e um outro b, e escrevo a + b. Quando a - b indicarei que b e subtraído de a; ab que a é multiplicado por b; a/b que a e dividido por b; aa ou a^2 que a e multiplicado por ele mesmo, a^3 que este resultado é multiplicado por a, e assim sucessivamente. Agora, se eu desejo extrair a raiz quadrada de $a^2 + b^2$ eu escrevo $\sqrt{a^2+b^2}$; se eu desejo extrair a raiz cúbica de

$a^3 - b^3 + ab^2$ eu escrevo $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$, e similarmente para outras raízes. Aqui deve ser observado que para a^2, b^3, e similares expressões, eu quero dizer simplesmente linhas simples, os quais entretanto, eu nomeio quadrado, elevado ao cubo, etc, de modo que eu posso fazer uso de termos empregados na álgebra) (grifos nossos)

Nessa citação, percebe-se uma desvinculação da figura geométrica diante da possibilidade do uso de uma estrutura algébrica conveniente. Essa desvinculação não tem o objetivo de se fazer a relação. Pelo contrário, é o que permite a relação evitando fatos caóticos.

As letras utilizadas por DESCARTES, hoje compreendidas como incógnitas representando números, eram entendidas como segmentos unitários (a unidade quantitativa) o que permitiria avançar para além das investigações gregas (BOYER,1974;248). Expressões como a^2 (ou a^3) passavam a não serem mais representações de quadrados (ou cubos), mas sim, vistas enquanto abstrações de medidas de segmentos. A álgebra geométrica grega através de seu atrelamento à figura seria superada por uma representação algébrica com significado quantitativo da figura geométrica, de tal modo que, em sua especificidade, apresentasse a cooptação dos conhecimentos geométricos gregos por uma representação em um nível de abstração maior.

Este procedimento, por não se limitar apenas às formas concretas das figuras geométricas, permitiu uma inovação para o desenvolvimento da matemática. E isto está explicitado por DESCARTES na apresentação de seu método (DESCARTES,1952:296):

> If, then, we wish to solve any problem, we first suppose the solution already effected, and give names to all the lines that seem needful for its construction, - to those that are unknown as well as to those that are known. Then, making no distinction between known and unknown lines, we must unravel the difficulty in any way that shows most aturally the relations between these lines, until we find it possible to express single quantity in two ways. This will constitute an equation, since the terms of one of these two expressions are together equal to the terms of the other.
>
> (Querendo portanto resolver um problema qualquer deve-se antes do mais considerá-lo como ultrapassado e dar nomes a todas as linhas que apareçam necessárias à sua elaboração, quer às incógnitas quer às outras. Em seguida, sem fazer qualquer diferença entre estas linhas, conhecidas e desconhecidas, deve-se percorrer a dificuldade segundo a ordem que nos indicar a ser a mais natural possível, de modo que elas dependem mutuamente uma das outras até ao momento em que se encontre formas de exprimir uma mesma quantidade de duas maneiras. Isto se constituirá uma equação, já que os termos de umas destas duas maneiras são iguais aos da outra).

O que DESCARTES fez foi analisar um problema geométrico pela linguagem algébrica reduzindo-a a uma equação na sua forma mais simplificada e desprovendo-a momentaneamente da figura. Porém, após a simplificação efetuada pelo trabalho algébrico, DESCARTES resolve a equação resultante geometricamente a maneira dos algebristas anteriores.

Este retorno à resolução geométrica se dá porque a preocupação de DESCARTES consistia na busca de um método que facilitasse a resolução de problemas de construções geométricas. Sua preocupação, como a de muitos matemáticos de sua época, apesar de ser pela resolução geométrica, apresentou a inovação de proceder pela associação entre curvas e equações - o verdadeiro significado da superação dos métodos geométricos dos antigos gregos exposto em sua obra.

Portanto, é importante observar que desde o início de suas investigações, DESCARTES preocupou-se com problemas de construções geométricas; mas sua análise a tais problemas se deu de uma forma inovadora, forma que passou por ele sem o devido destaque que viria a merecer. KLINE(1972:317) ressalta:

> The emphasis placed by posterity on La Géométrie was not what Descartes had intended. While the salient idea for the future of mathematics was the association of equation and curve, for Descartes this idea was just a means to an end - the solution of geometric construction problems.
>
> (A ênfase colocada para posteridade na Geométrie não foi o que Descartes tinha pretendido. Enquanto a idéia saliente para o futuro dos matemáticos fosse a associação de equação e curva, para Descartes esta idéia era justamente um meio para um fim - a solução de problemas de construções geométricas).

Reduzindo a equação à sua forma mais simplificada, sua resolução geométrica passou a ser associada à construção pelo grau da equação. Melhor dizendo: o grau da equação corresponde-se com o instrumento geométrico satisfatório para a construção geométrica proposta inicialmente. Nisto consistia o aspecto relacional entre curva e equação.

Isto levará DESCARTES a concluir que, por exemplo, para o caso de construções resolvidas pelo uso de régua e compasso, a equação obtida poderá ter as formas $z^2 = az + b^2$ ou $z^2 = az - b^2$ ou $z^2 = -a.y + b^2$ (z como quantidade desconhecida), isto é, as equações serão do segundo grau (DESCARTES,1952:297).

É importante compreender que uma equação como $z^2 = az + b^2$ representa um problema de construção geométrica em que a construção do segmento z exigido retrata uma relação quantitativa com os demais segmentos envolvidos na construção; relação esta expressa algebricamente por $z^2 = az + b^2$. Além disso, $z^2 = az + b^2$ determina uma associação entre seu grau (grau dois) com o instrumento geométrico necessário (no caso régua e compasso) para construção do problema.

Uma equação na forma $z^2 = az + b^2$ DESCARTES resolvia assim (DESCARTES 1952:297):

Constrói-se um triângulo retângulo NLM com lado LM = b (raiz quadrada de b) e lado LN = (1/2)a (figura 43)

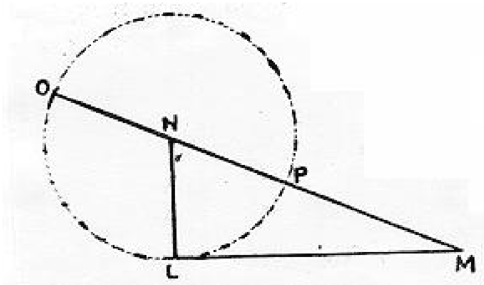


figura 43

Prolongando MN até um ponto O pelo traçado de uma circunferência de centro N e raio NL obtém-se obviamente NO = NL.

O segmento OM é o segmento z, raiz positiva da equação.

É importante observar que quanto a raiz negativa, que é o segmento PM, DESCARTES não considera. E este fato se faz presente no transcorrer de toda sua obra.

Mas DESCARTES também resolvia o problema na forma algébrica. Assim, alem da obtenção geométrica da raiz z, DESCARTES apresentava sua correspondente solução algébrica:

$$z = (1/2)a + \sqrt{(1/4)a^2 + b^2}$$

Fazendo uma análise da solução algébrica apresentada e a figura, pode-se observar que na figura tem-se OM = ON + NM.

Sabe-se que ON = NL = (1/2)a. Quanto a NM, é hipotenusa do triângulo retângulo NLM e, por PITAGORAS, $NM^2 = NL^2 + LM^2$,isto é, $NM^2 = \{(1/2)a\}^2 + b^2$

$NM^2 = (1/4)a^2 + b^2$ ===> $NM = (1/4)a^2 + b^2$

Daí que

OM = z = ON + NM

$$OM = z = (1/2)a + \sqrt{(1/4)a^2 + b^2}$$

Esta solução, aqui esmiuçada, ocorreu sob análise da figura. O mesmo poderia se dar pela análise da solução algébrica da equação $z^2 = az + b^2$, o que DESCARTES não explicita, limitando-se a apresentar somente a solução

$$z = (1/2)a + \sqrt{(1/4)a^2 + b^2}$$

Para $z^2 = -az + b^2$ o procedimento é análogo e a raiz é o segmento procurado PM. A solução algébrica apresentada é

$$z = -(1/2)a + \sqrt{(1/4)a^2 + b^2}$$

Observe que $\sqrt{(1/4)a^2 + b^2}$ é NM e (1/2)a é NL = NP.

O segmento PM procurado é NM - NP, isto é,

$$\sqrt{(1/4)a^2 + b^2} - (1/2)a \quad \text{ou} \quad -(1/2)a + \sqrt{(1/4)a^2 + b^2}$$

Para $z^2 = az - b^2$ a construção geométrica é diferente.

DESCARTES coloca no segmento NL = (1/2) a perpendicular a LM = b mas, sem uni-los (o que faria o triângulo retângulo NLM com NM sendo a hipotenusa). Em M, DESCARTES traça uma reta perpendicular a LM, paralelo a NL (figura 44).

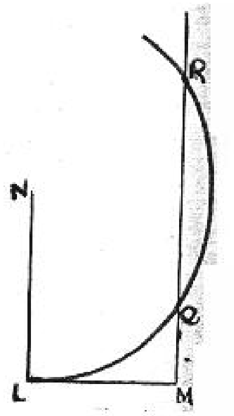


fig.44.

Considerando N o centro de uma circunferência com raio NL, a circunferência corta a reta perpendicular construída nos pontos Q e R. DESCARTES afirma que a solução procurada é MQ ou MR. A correspondente solução algébrica é

$$z = (1/2)a + \sqrt{(1/4)a^2 - b^2} \quad \text{ou} \quad z = (1/2)a - \sqrt{(1/4)a^2 - b^2}$$

Aqui, ao contrário das equações $z^2 = az + b^2$ e $z^2 = -az + b^2$ há a apresentação de duas soluções possíveis. Isto porque as duas soluções encontradas são positivas.

Ainda neste caso, DESCARTES observa que se a circunferência de centro NL for traçada de forma a não cruzar o segmento MQR a construção geométrica não é possível, o que corresponde a equação não possuir raízes. Na verdade as raízes existem, só que elas são negativas, fato este não considerado por DESCARTES.

Tais considerações levam DESCARTES a perceber uma relação entre a solução geométricas das equações e os seus respectivos graus. Assim, para equações quadráticas bastam procedimentos geométricos com retas e círculos; para equações cúbicas e quárticas o uso de secções cônicas.

Inspirado pelos problemas de construções geométricas dos antigos, DESCARTES munido de seu método, parte para análise de um problema anteriormente proposto por PAPUS de Alexandria.

Na sua forma mais simples (KARLSON,1961:237), o problema considera inicialmente quatro retas. É necessário determinar uma curva cujos pontos são tais que o produto das distâncias das primeiras duas retas consideradas deve ser igual ao produto das distâncias às outras retas nestes pontos da curva (figura 45).

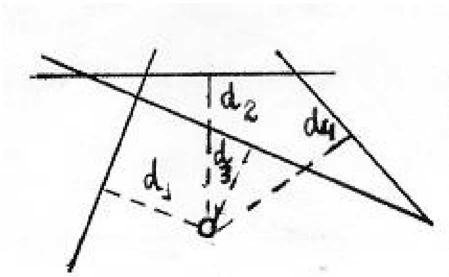


fig.45

Na figura 45, C é o ponto da curva de forma que $d_1 . d_2 = d_3 . d_4$

PAPUS afirma que para o caso de três ou quatro retas é possível construir qualquer uma das três secções cônicas. Porém, para 5 ou 6; 7 ou 8 ou mais retas, PAPUS não se comprometia a afirmar nada. DESCARTES analisa o caso para três ou quatro retas e vai mais além, generalizando o problema. Afirma que para cinco ou seis retas o lugar geométrico é representado por uma equação cúbica, para sete ou oito retas o lugar geométrico é representado por uma quártica e, assim, sucessivamente.

Considerando estes casos, DESCARTES não se preocupa com a construção em si das curvas, mas sim, em obter as resoluções geométricas das equações encontradas, o que lhe permitiu perceber a relação existente com o grau das equações.

É na sua análise do caso das quatro retas que DESCARTES inova ao utilizar um sistema de coordenadas oblíquas.

A resolução apresentada por DESCARTES inicialmente contida no livro I, e depois retomada no livro II, envolve aplicações sucessivas da Teoria de Semelhança entre triângulos.

Trata-se de uma resolução extensa e nesse sentido, é preciso esclarecer que não é objetivo deste trabalho esmiuçar a resolução propriamente dita do problema, mas sim, resgatar os momentos fundamentais que explicam a gênese das coordenadas. Sendo assim, as etapas dessa demonstração aqui selecionadas se deram exclusivamente com o intuito de mostrar o uso das coordenadas, o que deixa em segundo plano a explicação da resolução do problema de PAPUS efetuada por DESCARTES.

As coordenadas de DESCARTES surgem como referências em que os elementos matemáticos envolvidos são interpretados. DESCARTES afirma (DESCARTES,1952:301).

> Firts, I suppose the thing done, and since so many lines are confusing, I may simplify matters by considering one of the given lines and one of those to be drawn (as for example, AB and BC) as the principal lines, to which I shall try to refer all the others. Call the segment of the line AB between A and B, x, and call BC, y. Produce all the other given lines to meet these two (also produced if necessary) provided none is parallel to either of the principal lines. Thus, in the figure, the givens lines cut AB in the points A, E, G, and cut BC in the points R, S, T.
>
> Primeiramente, eu suponho dada a coisa e desde que algumas linhas estão confundindo, eu posso simplificar a questão considerando uma das linhas dadas e uma daquelas a ser desenhadas (como por exemplo, AB e BC) como a linha principal, o qual eu tentarei referir todas as outras. Chamando o segmento da linha AB entre A e B, x, e chamando BC, y. Produzo todas as outras linhas dadas para encontrar estas duas (também produzindo se necessário) provido nenhuma paralela para outras linhas principais. Assim, na figura, as linhas dadas cruzam AB nos pontos A, E, G, e cruzam BC nos pontos R, S, T.

A exposição das principais etapas aqui selecionadas se deram em função do estudo efetuada a partir da própria obra de DESCARTES (DESCARTES,1952:308), e das explicações apresentadas por KLINE (KLINE 1972:310).

Inicialmente DESCARTES denominava as quatro retas por AB, AD, EF e GH (figura 46).

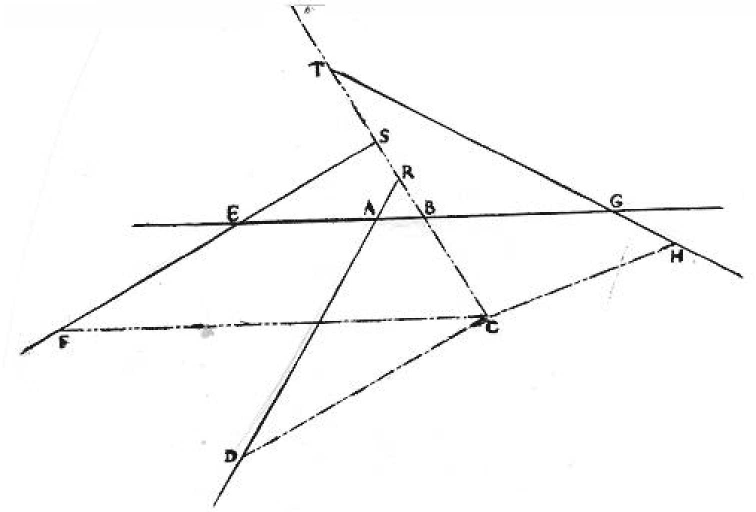


fig.46

A partir desta referência, isto é, os eixos x (de AB) e y (de BC) DESCARTES parte para a caracterização do ponto C. O ponto C é determinado de modo que as retas CB, CD, CF, CH e os ângulos CBA, CDA, CFE e CHG sejam tais que satisfaçam a condição CB.CF = CD.CH.

Considerando x e y, DESCARTES estende os demais segmentos FE, AD, GH de forma a cruzarem BC em S, R e T e a cruzarem AB em E, A e G.

Considerando os triângulos ARB, DRC, ESB, FSC, BGT e TCH e as relações existentes entre seus ângulos conhecidos e seus respectivos lados, DESCARTES obtém os seguintes valores para CF, CD e CH (DESCARTES,1952:302):

$CF = (ezy + dek + dex)/ z^2$

$CD = (cy)/z + (bcx)/z^2$ ou $CD = (czy + bcx)/ z^2$

$CH = (gzy + fgl - fgx)/ z^2$ onde z, b, c, d, e, f e g são quantidades que expressam respectivamente as razões entre AB e BR; CR e CD; BE e BS; CS e CF; BG e BT; TC e CH; sendo k = AE e l = AG.

Aplicando esses valores na condição imposta CB.CF = CD.CH

DESCARTES, no livro II obtém a equação (DESCARTES,1952:308)

$$y^2 = \{(cfglz - dekz^2).y - (dez^2 + cfgz - bcgz).xy + bcfglx - bcfgx^2\} / ez^3 - cgz^2$$

Esta equação pode ser escrita na forma geral

$y^2 = Ay + Bxy + Cx + Dx^2$ sendo A, B, C e D expressões algébricas das quantidades z, b, c, d, e, f, g, k e l conhecidas.

Escolhendo valores para x obtém-se uma equação quadrática em y, o que quer dizer que y pode ser construído com régua e compasso, procedimento apresentado no livro I e exemplificado na figura 43. A infinidade de valores possíveis para x, e conseqüentemente obtidos para y, permitem determinar o locus (o lugar geométrico) dos pontos C. Porém, é importante observar que esses valores restringem-se a valores positivos, o que na linguagem moderna leva a determinação da curva a seu primeiro quadrante.

No seu livro II, DESCARTES também discute sobre a classificação dada pelos geômetras antigos para os tipos de curvas existentes.

Para os gregos as figuras restringiam-se àquelas construídas por retas e círculos, sendo as superfícies (cone, esfera, cilindro) consideradas por extensão como rotações de retas e círculos em torno de seu eixo. Exceções admitidas eram o plano (analogia da reta), o prisma (uma espécie de cilindro) e a pirâmide (originada da decomposição do prisma).

Conheciam curvas que eram para eles estranhas. Eles as denominavam de mecânicas. É o caso da conchóide de NICOMEDES (BRONSTEIN,1979:119) a cissóide de DIOCLES (BRONSTEIN,1979:117) e a quadratriz de HIPPIAS (BOYER,1974:51) que são apresentadas na figura 47 abaixo.

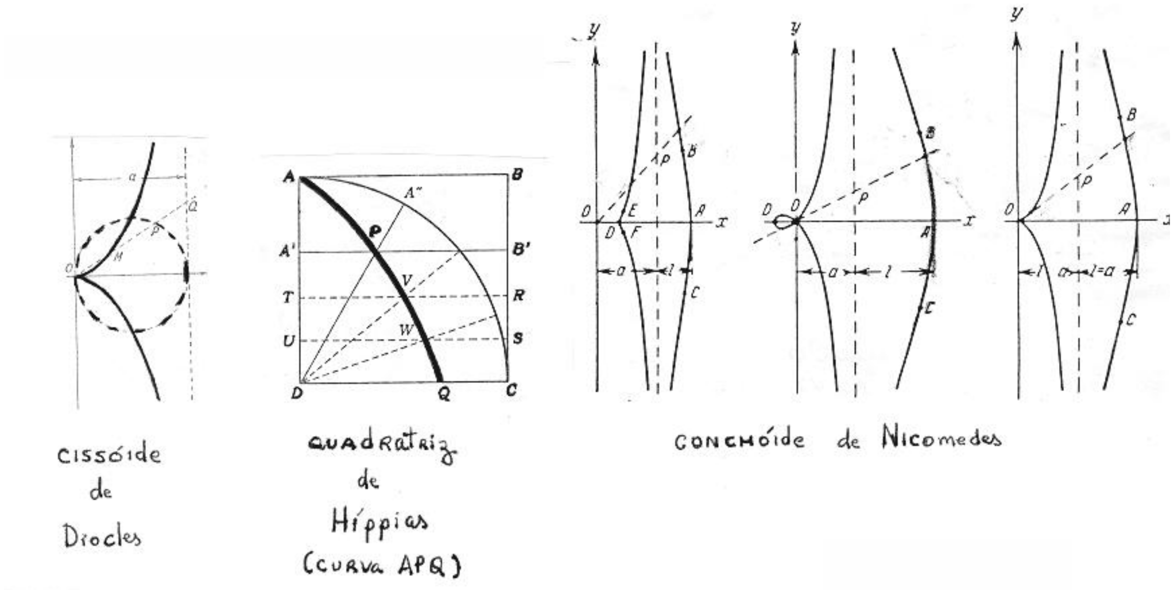


fig.47

Com isto, os gregos passaram a classificar as curvas em:

- curvas planas (ou lugares planos): as curvas obtidas por construções envolvendo retas e círculos;

- curvas cônicas ou as cônicas (também chamadas lugares sólidos): as curvas formadas por secções no cone;

- curvas lineares (ou lugares lineares): um agrupamento de outras curvas que não sejam cônicas, retas e círculos (é o caso da espiral, da conchóide, da cissóide e da quadratriz).

Como conseqüência, os problemas de construções geométricas passaram a obedecer a mesma classificação:

- problemas planos: eram problemas resolvidos por meio de retas e círculos;

- problemas sólidos: eram problemas resolvidos por meio de uma ou mais secções cônicas.

- problemas lineares: eram problemas que exigiam o emprego de curvas mais complexas que retas, círculos ou cônicas.

A limitação grega para retas e círculos se explica pela sua existência estar relacionada a observações ainda muito presas às formas relativamente imediatas percebidas na natureza. Para as superfícies o mesmo se dava, pois era intuitivo pensar a esfera, o cilindro e o cone como revolução de círculos, retângulos e triângulos em torno de seus eixos. Quanto às secções cônicas eram admitidas por cortes no plano. Para as curvas mais complexas, eles a consideravam ilegítimas.

DESCARTES rompe com a classificação grega das curvas afirmando que curvas geométricas são aquelas representadas por equações algébricas em x e y. Tal afirmação lançou um campo enorme para investigações. O critério grego da existência das curvas por construção é negado, o que reflete o fim do cerceamento da investigação matemática dada pelas figuras geométricas.

Assim, curvas até então recusadas como a conchóide e a cissóide passaram a serem reconhecidas junto a reta, círculo e cônicas. Porém, quanto a quadratriz e a espiral, estas passaram a serem excluídas da geometria taxando-as de curvas mecânicas.

Na verdade a questão é que a quadratriz e a espiral são hoje conhecidas como curvas transcendentes, são curvas definidas por comprimento de arcos. Abaixo, na figura 48, é apresentada a espiral (BRONSTEIN,1979:129):

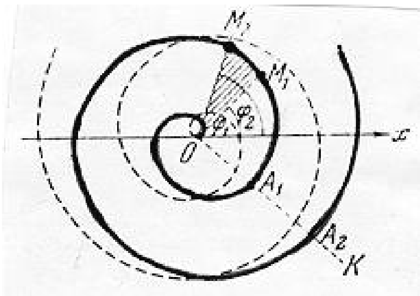


fig.48

O critério de DESCARTES é algébrico. O conceito moderno de curva algébrica define curva como aquela descrita por uma equação algébrica cuja solução é um número algébrico. Número transcendente é aquele que não é solução de uma equação algébrica, e daí, a dificuldade encontrada por DESCARTES para reconhecer as curvas transcendentes.

É importante observar que essa questão da representação algébrica da figura geométrica é o que determina a limitação da geometria analítica enquanto campo de investigação das figuras geométricas. A geometria analítica abarca tão somente a análise das figuras que podem ser representadas por equações algébricas (são muitas as curvas que não podem ser representadas por equações algébricas). Na verdade, a matemática já possui recursos mais avançados que os presentes na geometria analítica. Basta considerar, por exemplo, a utilização das equações diferenciais na definição de curvas até então não passíveis de serem explicitadas pela geometria analítica.

Voltando à análise da obra "Geometria".DESCARTES, em função de seu critério algébrico, passa a apresentar uma nova classificação das curvas. Ele as dispôs em classes, a saber:

- classe I: são as curvas descritas por equações do primeiro e segundo graus em x e y;

- classe II: são as curvas descritas por equações do terceiro e quarto graus;

- classe III: são as curvas descritas por equações do quinto e sexto graus; e assim sucessivamente.

O agrupamento de equações de graus 2n, 2n-1 na mesma classe se deu pela crença de que, percebendo que uma equação de quarto grau era redutível a uma equação cúbica resolvente, DESCARTES extrapolou afirmando que toda equação de grau 2n poderia ser resolvida pela redução a uma equação resolvente de grau 2n-1.

Na verdade, resultados algébricos demonstraram que tal extrapolação é incorreta (KLINE,1972:312).

Mesmo caindo em erro, a classificação proposta por DESCARTES apresentou o fator positivo de definir as curvas como aquelas representadas por equações algébricas em x e y, o que permitiu um campo enorme de investigação, já que passou a desvincular-se da determinação das curvas por construções geométricas.

Quanto ao livro III há referências às equações algébricas. A existência deste livro justifica-se pela necessidade exposta no seu método de reduzir um problema geométrico à uma equação algébrica na sua forma mais simples; o que exigiria procedimentos algébricos na análise de suas raízes. Como observa BOYER (1974:252) este livro é praticamente um curso sobre a teoria elementar das equações.

Destes procedimentos pode-se aqui destacar:

- determinação do número de raízes positivas e negativas de uma equação (uma equação tem tantas raízes verdadeiras quanto as mudanças de sinais que contém de + para - ou de - para + ; e tantas raízes negativas quanto o número de vezes de sinais + + ou - -);

- procedimentos para aumentar ou diminuir o valor das raízes de uma equação;

- resoluções de equações cúbicas e quárticas.

Analisando toda a obra de DESCARTES, percebe-se que sua maior contribuição foi a divulgação do uso de equações algébricas para representar e estudar curvas geométricas graças a relação recíproca entre álgebra e geometria até então não explicitada.

Porém, conforme inicialmente dito, os fundamentos da geometria analítica não se deram apenas com DESCARTES.

Contemporâneo a DESCARTES, FERMAT(1601-1665) também desenvolveu tais idéias. Ele as apresentou em sua obra "Ad locus planos et solidos isagoge", isto é, "Introdução aos Lugares Planos e Sólidos" publicada apenas após sua morte.

Em relação a DESCARTES, FERMAT recebeu um destaque secundário na história da matemática . Isto se explica, em parte, pela extensão das idéias filosóficas de DESCARTES a qual a matemática era apenas uma parte dessas idéias.

Da mesma forma que em DESCARTES, FERMAT inspirou-se na análise das obras dos gregos para elaborar sua obra. Mais precisamente, FERMAT buscava reconstruir a obra "Lugares Planos" de APOLÔNIO a partir de observações retiradas na "Coleções Matemáticas" de PAPUS. Mais uma vez, é uma aplicação da álgebra da Renascença a problemas geométricos dos antigos.

O ponto de partida de sua análise em vez de ser o problema de PAPUS, foi lugares geométricos mais simples.

Sua análise também utilizava sistema de coordenadas oblíquas, sendo que em BOYER (1974:254) encontra-se uma afirmação que FERMAT também utilizava ordenadas perpendiculares ao eixo das abcissas.

Segundo KLINE (1972:303) ele considerava um ponto J numa curva qualquer. A posição de J era fixada pelos comprimentos A e E medidos respectivamente com referência a uma reta base a partir de O até Z e de Z até J (figura 49). Observe como este é o procedimento atual adotado na determinação das coordenadas para um ponto P qualquer.

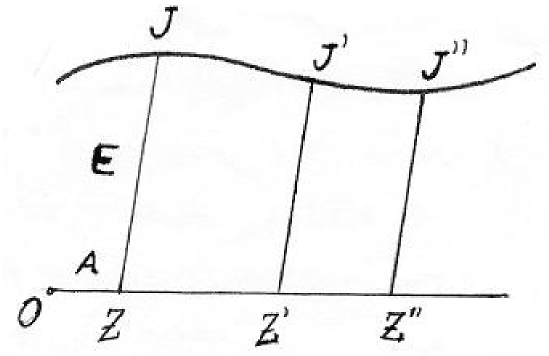


fig.49

Os comprimentos A e E correspondiam as nossas variáveis x e y. A curva era descrita pelos pontos J, J', J''... através das equações em A e E.

A partir daí, FERMAT associava as equações algébricas em A e E com suas respectivas curvas. Com isto obtinha os seguintes resultados (aqui expressos na notação moderna, x e y sendo as variáveis):

$Dx = By$; representação de uma reta

$d(a - x) = by$; representação de uma reta

$B^2 - x^2 = y^2$; representação de uma circunferência

$a^2 - x^2 = ky^2$; representação de uma elipse

$a^2 + x^2 = ky^2$; representação de uma hipérbole

$xy = a$; representação de uma hipérbole

$x^2 = ay$; representação de uma parábola

Como em DESCARTES, FERMAT não utilizava coordenadas negativas.

Apesar das semelhanças entre os progressos alcançados por FERMAT e DESCARTES, eles apresentavam diferenças quanto ao ponto de vista da investigação matemática .

Segundo KLINE(1972:316), DESCARTES surge rompendo com os procedimentos geométricos de construções dos gregos apresentando uma nova alternativa. Quanto a FERMAT, não havia uma crítica aos métodos gregos. Seu trabalho era creditado a uma reformulação conservadora que completaria os trabalhos de APOLÔNIO graças a aplicação do conceito de variável numérica presente em VIÈTE.

O reconhecimento de suas idéias foi tardio.

A obra de FERMAT foi divulgada somente após a sua morte.

Mesmo a notoriedade alcançada por DESCARTES não veio a contribuir para assimilação imediata de suas idéias. Dificuldades houveram para compreender a associação possível entre equação e curva. Segundo KLINE (1972:318), os motivos seriam, primeriamente, por causa da forma de apresentação da "Geometria", onde muitas passagens não foram devidamente explicitadas, o que DESCARTES deixava para que os leitores pudessem também ter "o prazer da descoberta". O segundo motivo, conforme já observado, foi a ênfase dada às soluções de problemas de construções, o que obscureceu a associação entre equações e curvas. As coordenadas geométricas foram inicialmente interpretadas simplesmente como mais um instrumento para resolver problemas de construções.

Há um outro fator que não deve ser esquecido. O fato das coordenadas geométricas exigirem procedimentos algébricos seguros.

Contemporâneos a DESCARTES viam a álgebra ainda não totalmente fundamentada logicamente em estrutura própria, mas sim, galgada em interpretações geométricas. Sendo assim, não poderiam aceitá-la numa forma independente ajudando a própria geometria. Percebe-se aqui que o atrelamento ao concreto das figuras geométricas tornou-se para muitos matemáticos, a única forma possível de instrumentalização matemática.

A geometria analítica determinou uma mudança de enfoque lógico na matemática. Desde os tempos gregos até por volta de 1600, a geometria era a base segura para investigações matemáticas, sendo a álgebra sua dependente. Com a geometria analítica começa a inversão de papéis, inversão esta concluída totalmente com o advento do cálculo.

De acordo com KLINE(1972:318), a divulgação da "Geometria" se dará em 1649 com Frans van SCHOOTEN(1615-1660). SCHOOTEN apresenta uma versão latina bastante acessível com esclarecedores comentários (BOYER,1974:272).

Algumas introduções explicativas da obra de DESCARTES se fizeram necessárias. O próprio DESCARTES viria a aprovar um comentário intitulado "Notas Breves" de autoria do matemático DEBEAUNE (BOYER,1972:272).

Uma outra grande contribuição à geometria analítica é dada por Jan de WITT (1629-1672) na sua obra "Elementa Curvarum" (BOYER,1972:272).

Philippe de LAHIRE (1640-1718) com sua "Nouveaux éléments des sections coniques" de 1679 esboça o conceito de coordenadas a três dimensões, fato este já implicitamente abordado por DESCARTES e FERMAT. Somente no século XVIII tal conceito amadurece (KLINE,1972:321).

Novos sistemas de coordenadas geométricas (as chamadas coordenadas polares) começam a serem propostos. Isaac NEWTON (1642-1727) é o primeiro através de sua obra "The Method of Fluxions and Infinite Series" (KLINE,1972:319).

A geometria analítica se constituirá em forma própria de investigação matemática a partir do surgimento do cálculo nos fins do século XVII com Isaac NEWTON e LEIBNIZ (1646-1716).

Mas a maior conseqüência dada pelo desenvolvimento da geometria analítica foi mesmo a construção de um instrumento de investigação em que o estudo quantitativo do mundo físico, tão exigido pela ciência do século XVII, pudesse se desenvolver. Até então, o estudo dos fenômenos restringiam-se a interpretações geométricas. As coordenadas possibilitaram colocar o estudo dos fenômenos físicos numa forma algébrica, o que possibilitou desenvolver o conhecimento quantitativo na ciência. Eram dadas uma das condições para a expansão da pesquisa científica que se seguiria no transcorrer dos séculos XVII e XVIII (KLINE 1972:322).

Considerações finais sobre esse capítulo.

O processo de apreensão dos conceitos da geometria analítica é um processo sincrético-analítico-sintético. A relação abstrato-concreto aí presente revela-se como sendo a essência da lógica do processo de elaboração dos conceitos na sua forma mais desenvolvida, na lógica de produto.

A maior compreensão desses conceitos na sua forma hodierna revela a necessidade de captar sua formação ao longo da história. Proceder a análise da lógica do produto é concebê-la enquanto lógica de processo, é concebê-la na sua intrínseca historicidade. O objetivo desse capítulo foi propiciar uma melhor compreensão da relação abstrato-concreto através de sua historicização.

Assim, a dicotomia hoje promovida entre os pólos algébricos e geométricos manifestados na aleatoriedade dos procedimentos de ensino se explica na história. O desenvolvimento tardio da álgebra que se fez posteriormente à geometria euclidiana ocorreu muito atrelado à figura geométrica. Isso ocorreu não apenas entre os gregos, devido a deficiência no tratamento de números incomensuráveis, mas também entre os demais povos, dada a influência da geometria grega na sua utilização como critério de validade de suas proposições algébricas.

Por outro lado, a história também fornece os subsídios lógicos necessários para a superação dessa dicotomia. Com o alto desenvolvimento algébrico atingido, a influência grega, que no momento anterior propiciou um processo dicotômico, passa agora a determinar, com a prática da utilização algébrica na resolução de problemas geométricos até então não resolvidos, a condição necessária para que DESCARTES e FERMAT pudessem perceber, mesmo que de forma embrionária, a reciprocidade algébrica e geométrica.

Esmiuçados esses momentos, cabe agora apontar como se manifesta a dicotomia entre os processos algébricos e geométricos no decorrer da apresentação e execução de procedimentos de ensino, bem como levantar os subsídios necessários para superação desse problema no ensino de matemática. Esse é o assunto do próximo capítulo.

CAPÍTULO III : O ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA: EM BUSCA DA SUPERAÇÃO DA DICOTOMIA ENTRE O ABSTRATO E O CONCRETO.

III.1- Introdução.

O objetivo deste capitulo não é o de apresentar uma proposta completa e totalmente sistematizada de ensino de geometria analítica. Entende-se aqui, que a construção de tal proposta e, aliás, de uma proposta para todo o ensino de matemática no 1º e 2º graus que busque superar a dicotomia entre abstrato e concreto é necessária e urgente. Isso porém, foge aos limites desta dissertação, na medida em que com ela, pretende-se apresentar uma contribuição para a elaboração futura daquela proposta, contribuição essa que se caracteriza pela defesa da hipótese de que o método dialético de ascensão do abstrato ao concreto pode ser uma poderosa ferramenta de análise do processo de conhecimento e de ensino-aprendizagem.

Tendo em vista esse objetivo, busca-se utilizar, neste terceiro capítulo, os resultados desenvolvidos no capítulo anterior para análise do ensino de geometria analítica tal como ele é realizado hoje e o delineamento de algumas diretrizes para a superação daquilo que está sendo aqui denominado de dicotomia entre o abstrato e o concreto.

De uma forma geral, a grande maioria dos procedimentos de ensino adotados pelos professores advém da utilização de livros didáticos. O livro didático é a forma mais elaborada encontrada pelo professor para apresentação do conteúdo matemático.

Os procedimentos metodológicos ai implícitos refletem uma priorização dos resultados conceituais de cada tópico em detrimento do seu processo de elaboração. Isto ocorre na medida que a apresentação do conteúdo se dá através de uma ênfase na execução de exercícios em detrimento da relação com os aspectos teóricos envolvidos.

Na medida em que se prioriza a mera aquisição de procedimentos para execução dos exercícios através da assimilação de diversas fórmulas, o conteúdo matemático é apresentado de uma forma dicotômica entre seu produto (os resultados conceituais) e o seu processo de elaboração (os procedimentos lógicos implícitos que engendram sua elaboração conceitual).

A dicotomia entre produto e processo aqui evidenciada não retrata uma ênfase pelos aspectos teóricos pertinentes à lógica do produto. Trata-se, na verdade, da ênfase em apenas um determinado aspecto do produto: a aquisição de fórmulas. Portanto, é importante deixar claro que não se trata de afirmar que a forma como geralmente se ensina prioriza a lógica do produto, mas sim, que essa forma trabalha apenas com uma parte desse produto, parte mais imediata que é a instrumentalização das fórmulas.

A apresentação de um conteúdo se dá através de um fazer (exercícios) subsidiado por um suporte teórico imediato, simplificado, reduzido a um conjunto de regras que o explica. A relação entre o fazer e a teoria resume-se a uma aplicação de fórmulas. O conjunto dos tópicos matemáticos estudados constitui-se numa seqüência, por justaposição, de conteúdos na qual não são evidenciados os aspectos relacionais entre um e outro tópico. A apresentação de cada tópico se dá através de uma acumulação de fórmulas sem vinculação a conceitos dos tópicos anteriores. Transmite-se assim, uma concepção estática de matemática.

Este estaticismo, ao não esmiuçar a relação entre os tópicos matemáticos, determina com que não se revele o caráter de processo na elaboração do conteúdo matemático. A matemática passa a ser erroneamente vista como sendo formada por conceitos pré-determinados, já dados, eternos.

É importante observar que esse estaticismo presente nos conceitos matemáticos tem se agravado em decorrência da grande influência dos vestibulares com o crescente número de cursos preparatórios (os chamados "cursinhos") determinando um enfoque mais pragmático, imediatista aos conteúdos das escolas estaduais públicas e particulares de 1º e 2º graus.

Tais fatos geram no alunado uma assimilação mecânica do conteúdo matemático. Incapaz de captar a lógica que engendra a formação dos conceitos em cada tópico apresentado, o aluno é conduzido para um nível de dependência do professor. Essa dependência ocorre na medida que o aluno é impossibilitado de concatenar de forma orgânica os dados obtidos a partir do estudo dos conceitos apresentados, o que faz com que para assimilar cada novo conceito, precise necessariamente receber do professor todos os elementos constitutivos do novo tópico. O aluno torna-se dependente do professor para cada novo tópico e acaba restringindo-se a uma repetição dos dados apresentados pelo professor. Consequentemente, a assimilação dos tópicos ocorre por justaposição, na medida em que não é desenvolvido o raciocínio por relação.

É preciso esclarecer que, em determinado sentido, o aluno acaba estabelecendo uma certa relação entre os tópicos, só que de uma forma muito simplista, por mera analogia, já que a lógica interna que está subjacente aos vários conceitos o força a isso.

A assimilação por analogia demonstra que, por mais que os procedimentos reduzam o aspecto relacional dos conceitos, a lógica interna que engendra a formação dos conceitos acaba, mesmo assim, se fazendo presente no momento da apreensão dos conceitos, pelo aluno, independente de ele ter consciência disto ou não. Os procedimentos metodológicos impedem a manifestação da lógica dos conceitos, mas essa lógica intrínseca aos conceitos se manifesta de certo modo fazendo com que o aluno acabe captando-a, embora de forma fragmentária e superficial.

Assim, apesar da forma estática e estanque através do qual o conteúdo matemático é apresentado impedir a compreensão das relações entre os conceitos matemáticos, o aluno chega a perceber a existência de alguma estrutura lógica interna que explica a relação entre os conceitos. Embora ele capte (de forma inconsciente, fragmentária, superficial) essa lógica, não chega a explicitá-la; mas ao perceber elementos comuns nos vários conceitos, acaba relacionando-os, embora por mera analogia.

O ensino da geometria analítica, tal como se apresenta na grande maioria dos livros didáticos contemporâneos e, consequentemente, tal como é desenvolvido na prática escolar de 1º e 2º graus, reduz a lógica de elaboração dos conceitos apenas a uma exposição dos principais resultados com suas respectivas demonstrações geométricas. Existe um reducionismo na relação entre álgebra e geometria a uma mera associação mecânica entre curva e equação sob ênfase nas expressões algébricas.

Existe uma infinidade de exemplos do ensino de geometria analítica que poderiam ser aqui analisados para melhor caracterizar a situação atual e o que está sendo aqui defendido como fio condutor do processo de superação dessa situação. Analisar superficialmente vários exemplos não seria um procedimento coerente com a proposta desta dissertação e analisar vários exemplos profundamente seria inviável por uma questão de espaço. Por essa razão, o procedimento escolhido foi o de analisar, o mais detalhadamente possível, um exemplo (um problema de geometria analítica) extraído de situações reais do ensino de geometria analítica.

Pensou-se, inicialmente, em considerar o exemplo das cônicas (na verdade, os primeiros escritos na formulação desta dissertação partiram da análise das cônicas para explicitação da lógica relacional entre álgebra e geometria), porém, como esse conteúdo é muito pouco desenvolvido em sala de aula, pensou-se em considerar um exemplo mais típico que muito bem retratasse o ensino de geometria analítica tal como ele é hoje, para que, mediante o referencial teórico aqui apresentado, pudesse ser analisado e, então a partir daí, fosse possível apontar algumas diretrizes para a elaboração futura de uma proposta de ensino sistematizada de geometria analítica.

A análise a partir desse exemplo específico necessariamente estará enfocando três aspectos:

O primeiro aspecto, diz respeito ao procedimento do aluno na resolução desse problema, isto é, como o aluno utiliza os conhecimentos que dispõe, de que forma ele assimila os conceitos matemáticos.

O segundo aspecto dessa análise refere-se a forma como os conceitos são transmitidos ao aluno pelo professor. A análise do problema escolhido volta-se para o papel do professor nesse processo. Para isso, torna-se necessário esmiuçar os aspectos implícitos na prática de ensino do professor que determinam a execução e elaboração de seus procedimentos metodológicos, a concepção de matemática que é vinculada através da utilização do livro didático.

O terceiro e último aspecto diz respeito a superação das dificuldades presentes no ensino de geometria analítica decorrentes da apresentação dos conceitos envolvidos nesse problema, bem como, a utilização desses conceitos na sua resolução.

Assim, buscar-se-á apresentar, para cada conceito envolvido, subsídios que apontem sua correta elaboração. Tais subsídios, se darão em função da lógica presente entre os processos algébricos e geométricos.

O problema escolhido é o seguinte (OBJETIVO,1990:96):

"Calcule a equação da reta s que passa pelo ponto P(-5,4) e é perpendicular a reta (r) $5x - 4y + 7 = 0$."

Tal problema envolve os conceitos de reta, coeficiente angular e coordenadas cartesianas.

Tendo em mente o objetivo de buscar uma forma o mais dinâmica possível para apresentação e discussão desses conceitos em função dos aspectos acima considerados, procurou-se esquematizar tais considerações em vários sub-ítens. Assim, os sub-ítens que se sucederão serão referentes aos conceitos envolvidos na resolução do problema escolhido, sua forma de apresentação através dos livros didáticos e sua correta elaboração em função da lógica presente na geometria analítica.

Na análise desses conceitos, alguns trechos de livros didáticos serão enfocados. O fato de se tomar estes trechos tem como objetivo ressaltar a grande influência dos mesmos na medida que não deixam necessariamente de refletir a postura do professor em sala de aula. É bom lembrar que, aqui, o livro é entendido como a forma mais elaborada de apresentação do conteúdo onde a grande maioria dos professores se pautam em suas atuações.

Embora o livro didático seja em determinado momento o ponto de partida da análise dos conceitos envolvidos, os itens não irão esmiuçar em todos os detalhes os procedimentos aí implícitos. Não é objetivo deste trabalho analisar o livro didático propriamente. Conforme já dito, pretende-se captar o tipo de lógica que se passa ao professor e, consequentemente ao aluno. Sendo assim, os exemplos esporádicos extraídos dos livros didáticos aqui selecionados justificam-se tão somente em relação a caracterização do tipo de lógica a se captar.

III.2- Análise do problema selecionado.

III.2.1- Sobre o problema a ser analisado

Na resolução desse problema, o aluno apresenta o conhecimento dos seguintes resultados conceituais:

1) Uma equação da reta passando por um ponto conhecido $P(x_0, y_0)$ é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$.

2) O coeficiente angular m é calculado por -a/b onde a e b são os coeficientes conhecidos da equação geral da reta na forma $ax + by + c = 0$.

3) Se duas retas r e s são perpendiculares então vale a seguinte relação entre os seus respectivos coeficientes angulares $m_r . m_s = -1$.

Com estes resultados conceituais em mente, o aluno para determinar a equação s utiliza primeiramente a relação $m_r . m_s = -1$, pois assim, m_r é facilmente obtido. Basta fazer $m_r = -a/b$ onde $a = 5$ e $b = -4$, os coeficientes da equação da reta (r) $5x - 4y + 7 = 0$ fornecida pelo problema.

$$m_s . -5/-4 = -1$$

$$m_s = -4/5$$

Tendo $m = -4/5$ e $P(-5,4)$ o ponto conhecido, ele aplica a fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$ para obter a resposta, a equação da reta s procurada.

Assim, $y - 4 = (-4/5).(x -(-5))$

$y - 4 = -4x/5 - 20/5$

$5y - 20 = -4x - 20$

$5y + 4x = 0.$

A resolução apresentada pelo aluno, se dá em função de um conjunto de conceitos que ele possui referentes ao tópico da geometria analítica considerado. Trata-se do estudo da reta. Este tópico compreende os conceitos de coeficiente angular, posições relativas entre duas retas e demais formas de equações.

Sua resolução é uma aplicação desses conceitos. O aluno retira do problema os dados estritamente necessários que compõem as fórmulas de cada conceito envolvido.

Tanto é assim que a pergunta do problema tem como resposta uma equação de reta que na teoria é dada pela expressão $y - y_0 = m(x - x_0)$. É graças a esse dado teórico que ele possui, que ele percebe a necessidade de se buscar apenas o valor de m (o coeficiente angular), pois já tem $(x_0 , y_0) = (-5,4)$ o ponto P do problema.

É então que ele obtém m pela condição de perpendicularismo desta reta com r seguindo o que é exposto no enunciado.

Note-se, porém, que todo seu raciocínio é feito de uma forma mecânica em função das fórmulas que ele possui. Essa forma de se proceder a solução do problema ofusca todo o raciocínio do aluno, impossibilitando assim, que ele estabeleça as relações entre as abstrações algébricas e a figura geométrica, isto é, impossibilitando que ele compreenda a figura enquanto totalidade concreta, enquanto síntese de múltiplas relações.

Isso pode ser constatado pela pergunta, muito fregüente, do aluno ao professor: "é preciso fazer a figura ?". Nesse caso, fazer a figura é algo que se justapõe às abstrações algébricas e não um momento de síntese. A lógica das relações é substituída pela lógica da justaposição.

Daí que a lógica interna do problema é substituída por mecanismos vazios, puramente automatizados e não compreendidos.

Em que consiste esses mecanismos ?

Embora implicitamente o aluno perceba pela compreensão do termo "perpendicular", a representação geométrica do problema, sua resolução se limita à constatação dos dados que faltam na expressão algébrica da equação da reta exigida. Quando chega a traçar a figura geométrica porque o professor a exige, o aluno a apresenta de uma forma imediata e justaposta ao cálculo algébrico; como um produto que vem depois desse cálculo. Serve-se da figura geométrica, o estritamente necessário para execução das fórmulas e/ou representação do cálculo geométrico obtido.

O que se percebe é que o aluno executa os procedimentos de cálculo pautando-se exclusivamente na operacionalização de fórmulas decoradas. Esse proceder, porém não é necessariamente algo "arranjado" pelo aluno. É interessante notar que a grande maioria dos problemas apresentados favorecem esse tipo de execução das fórmulas na medida que não apresentam maiores dificuldades que aquelas restritas às aplicações dessas fórmulas. Assim, o modo do aluno resolver problemas de geometria analítica é conseqüência dos procedimentos de ensino. Esses procedimentos promovem uma análise mecânica do conteúdo na medida que se limitam a instrumentalizar o educando a operacionalizar um conjunto de fórmulas referentes a cada tópico matemático considerado.

Dessa forma, o aluno se "capacita" dentro de um campo de análise por demais limitado. Num problema em que os dados exigidos não são facilmente obtidos, o aluno fica incapacitado para obter a resposta. Seu campo de análise restringe-se tão somente a uma situação de problema em que é fornecida apenas determinados dados que compõem a fórmula (a resposta do problema). Em outras palavras: o aluno apreende o conceito na sua forma mais imediata, isto é, a fórmula, não compreendendo efetivamente os múltiplos aspectos lógicos intrínsecos à estrutura do conceito. Sem essa compreensão o aluno resolve somente problemas padronizados, não desenvolvendo-se como sujeito da interpretação de diversos problemas mais complexos.

Quanto à resolução propriamente dita do problema, o conceito exigido é a equação da reta. O aluno assimila o conceito de reta no que diz respeito às principais fórmulas algébricas que a caracterizam. Esse modo do aluno proceder é justificável na medida que a grande maioria dos livros didáticos apresentam os conceitos através de uma ênfase na operacionalização das suas respectivas fórmulas.

No próximo sub-item será caracterizada a lógica presente nos procedimentos de ensino contidos na maioria dos livros didáticos que permeia a apresentação do conceito de reta, suas equações, bem como, determinar-se-á os subsídios necessários para sua re-elaboração em função da superação da dicotomia abstrato-concreto aí implícita.

III.2.2- Sobre as retas.

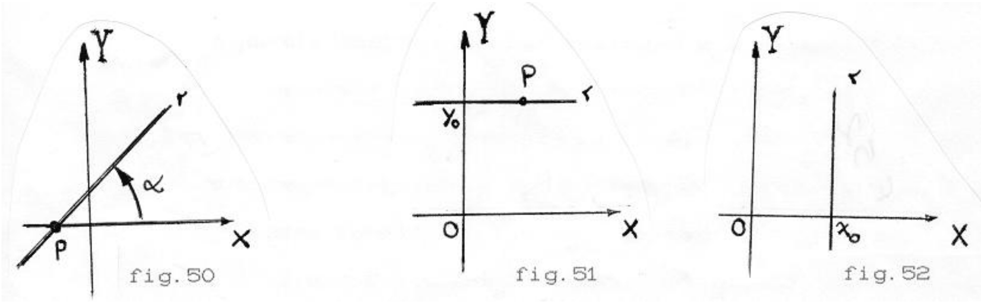
Inicialmente, será considerado um exemplo de como a equação da reta é apresentada em um livro didático.

Por exemplo em BOULOS(1978:6) a equação da reta é desenvolvida considerando três possibilidades quanto a sua posição em relação aos eixos coordenados:

1) a reta r não-paralela a cada eixo de coordenada (fig.50);

2) a reta r paralela ao eixo das abscissas, isto é, o eixo X (fig.51);

3) a reta r paralela ao eixo das ordenadas, isto é, o eixo Y (fig.52).



Em 1) a equação da reta é obtida a partir da relação entre a inclinação da reta m (tangente do ângulo α), um ponto $P(x_0, y_0)$ dado e um ponto $P(x, y)$ qualquer (fig.53). Obtém-se a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$.

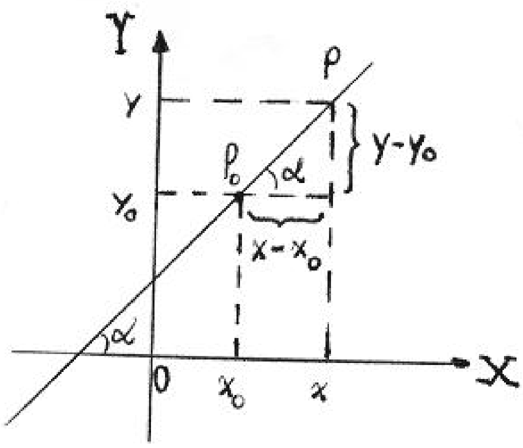


fig.53

Em 2), a equação da reta obtida é $y = y_0$ (todos os pontos da reta têm a mesma ordenada y_0).

Em 3), a equação obtida é $x = x_0$ (todos os pontos da reta têm a mesma abscissa x_0).

A partir daí, de $y - y_0 = m.(x - x_0)$, tem-se $y - y_0 = mx - mx_0$

$mx - y + y_0 - mx_0 = 0$ isto é, $mx + (-1)y + (y_0 - mx_0) = 0$

Da mesma forma para $x = x_0$ tem-se $1.x + 0.y + (-x_0) = 0$

O que faz concluir que toda equação da reta tem sua forma geral dada por

$ax + by + c = 0.$

Com a apresentação da equação da reta, os exercícios selecionados em BOULOS dizem respeito a aplicação exclusiva da fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Na medida em que BOULOS trabalha com os conceitos no seu nível mais imediato, que é o nível da lógica operatória de aplicação de fórmulas, o aluno não apreende os conceitos considerando seus aspectos lógicos intrínsecos, próprios da lógica que engendra e explica sua elaboração conceitual.

É importante aqui fazer um parênteses para observar que essa crítica ao uso indiscriminado das fórmulas em detrimento do processo de elaboração dos conceitos não deve ser entendida no nível extremo de que é sempre necessário desvendar o "porque da coisa". Há de se considerar situações específicas em que se exige uma apropriação cotidiana pragmática onde não é indispensável dominar a lógica do processo de elaboração dos conceitos.

Por exemplo, muitos lidam com computadores sem precisar dominar a lógica de sua programação. O ato de dominar o uso dos computadores requer procedimentos de aprendizagem imediatos.

Em muitas outras situações, como o manuseio do "torno" por um aluno de uma escola profissionalizante, a matemática participa dessa aprendizagem como um dos conhecimentos a serem dominados. Nesse caso, a mera apresentação de fórmulas em muito contribui para que o aluno possa utilizar o torno.

Ocorre que, na problemática dessa dissertação, o conhecimento matemático é o objeto da aprendizagem, isto é, sua apropriação é a finalidade última a ser alcançada, daí, o domínio da lógica dos conceitos ser um fato indispensável.

Entretanto, também não deve ser desconsiderada uma situação muito particular em que, no decorrer da apresentação dos conceitos, exige-se um conhecimento até então ainda não desenvolvido para os alunos, conhecimento esse que apresenta uma certa complexidade com relação ao nível da aprendizagem em que os alunos se encontram naquele momento. Nesse caso particular, a fórmula surge sem a possibilidade de ser esmiuçada e o ato de apresentá-la é indispensável para o prosseguimento da apresentação do conteúdo. Porém, nesse caso, a compreensão da lógica do conceito traduzido na fórmula aprendida deverá tornar-se possível num estágio posterior da aprendizagem.

Continuando a análise do trecho extraído em BOULOS (1978:6).

Na verdade, BOULOS apresenta um procedimento muito comum nos livros didáticos (e também nas apostilas dos cursos preparatórios para os vestibulares), qual seja, a ênfase existente na operacionalização de certas fórmulas em detrimento da própria lógica de elaboração dos conceitos matemáticos, lógica essa da qual a própria operacionalização é apenas um momento.

Explicando melhor: existe a lógica interna do conhecimento matemático e a lógica própria dos procedimentos de cálculo. O que ocorre no processo de ensino é que se assimila a lógica dos cálculos. Da lógica interna do conhecimento matemático, o aluno só capta alguns dados, e não a lógica propriamente dita.

A lógica do cálculo tem como objetivo a operacionalização do raciocínio procurando sempre o caminho mais imediato e prático.

Neste sentido é avanço, pois, facilita e diminui o tempo utilizado para fazer o cálculo, isto é, ela reduz o tempo que se estaria raciocinando dentro da lógica interna do conhecimento matemático, pois, operacionaliza mais rápida e mais eficiente sem perda de tempo. Ela é instrumento do conhecimento matemático, mas na hora do ensino ela passa a ser o próprio conteúdo a ser apreendido pelo aluno. Ela deixa de ser um instrumento operatório e passa a ser um fio condutor que "garante" a aprendizagem do conteúdo. Essa "garantia" de operacionalização dos cálculos, torna dispensável a preocupação com a lógica interna do conteúdo matemático.

Repetindo: neste tipo de ensino, o que é valorizado é a lógica da operacionalização. Aquilo que era um instrumento de cálculo transforma-se no próprio conteúdo. Todo conteúdo restringe-se a esta operacionalização.

A valorização da lógica da operacionalização em detrimento da lógica interna do conhecimento matemático retrata, na verdade, um reducionismo nos aspectos lógicos presentes nessa própria elaboração algébrica, na medida em que tal elaboração expressa uma priorização dada a lógica dos procedimentos de cálculo (pelo manuseio de fórmulas) em detrimento da lógica do conhecimento matemático. Pela sua praticidade, a lógica do cálculo torna-se um instrumento eficaz para operacionalização dos conceitos, mas ao mesmo tempo faz com que toda a lógica de elaboração não seja compreendida em seus aspectos intrínsecos. Desta forma, a própria lógica dos conceitos algébricos intimamente relacionada ao raciocínio geométrico se reduz a operacionalização de fórmulas. Sem o acesso ao aspecto relacional que engendra os conceitos, a própria lógica dos conceitos algébricos através da apresentação de fórmulas é apreendida pelo aluno como um dado sem nexo. Embora eficaz, apresenta-se aleatório.

Assim, o fato da fórmula ser eficaz na operacionalização do cálculo, não justifica o reducionismo do conteúdo a ser apreendido pelo aluno, pelo simples ato de dominar o cálculo, o que acaba produzindo o não desenvolvimento do raciocínio do aluno no processo de elaboração da fórmula. Esta, retrata o aspecto relacional existente com sua figura geométrica. O concreto da figura geométrica é o elemento que vivifica a expressão algébrica abstrata até então estéril em sua composição literal, na medida em que, na relação entre os aspectos algébricos e geométricos, este último apresenta-se como ponto de referência da relação. O cálculo algébrico se estrutura através do respaldo do concreto da figura geométrica. Porém, esse respaldo não se traduz na dependência da álgebra à geometria, pois, não é esgotada a possibilidade da relativa autonomia algébrica. Daí, sua elaboração conceitual constituir-se numa estrutura própria de investigação matemática.

Só que dessa autonomia, o processo de ensino a releva para autonomia absoluta, transformando o momento da assimilação do cálculo algébrico enquanto momento mesmo da assimilação dos conceitos da geometria analítica. A lógica do cálculo passa a ser considerada como se fosse o próprio conhecimento matemático. Ao ser tomado por si mesma, a lógica do cálculo torna-se um entrave para a apreensão dos conceitos.

Na medida em que o professor não compreende a lógica interna do conhecimento matemático e o porquê da operacionalização desse conhecimento através da forma específica que se tornou o cálculo algébrico, ele acaba reduzindo o conhecimento matemático ao mero domínio do cálculo algébrico. O que se ensina ao aluno passa a não ser propriamente geometria analítica, mas tão somente determinados cálculos algébricos.

Além do mais, é importante observar que a absolutização do cálculo algébrico também determina uma distorção na função das figuras geométricas na relação dos conceitos da geometria analítica. Por serem as figuras geométricas o ponto de referência da relação, elas se constituem em fio condutor do raciocínio na apreensão dos conceitos. Isto, em parte, acaba sendo percebido pelos livros didáticos, tanto que eles, no momento da apresentação teórica dos conceitos, fazem considerações a fatos geométricos. Porém, dada a absolutização das expressões algébricas, a lógica da elaboração dos conceitos é reduzida a mera aplicação de fórmulas. Neste momento, a figura geométrica só aparece como uma ilustração dos dados obtidos pelas fórmulas.

Note-se que na execução de um exercício, a figura vem geralmente após os cálculos efetuados, e assim mesmo quando o professor a exige. A figura geométrica que aparece nestas condições, também é um elemento estéril. Os dados geométricos não são abordados pelo enfoque da relação de reciprocidade com os resultados algébricos. A utilização ocorre através de uma redução dos aspectos relacionais, extraindo os dados geométricos estritamente necessários que justificam as fórmulas. Os dados geométricos aí aparecem sempre como elementos justapostos e não como condutores de um processo de apreensão dos conceitos desde o estágio de captação da lógica do processo de formação desses conceitos até o estágio de apreensão desses através da elaboração de exercícios.

A partir do momento que tais fórmulas são apresentadas, os exercícios selecionados são resolvidos pelo uso exclusivo dessas fórmulas. O papel da figura é colocado num plano secundário, com seu significado totalmente distorcido.

Note-se, portanto, que a lógica do cálculo, apesar de apresentar sua eficácia operatória, ela só é verdadeiramente aceitável se trabalhada pela óptica das etapas fundamentais da elaboração do conhecimento matemático. Desta forma, a lógica do cálculo é avanço. Do contrário, torna-se meros dados aleatórios. Daí, uma das razões do desinteresse do aluno. Dada a ênfase à lógica do cálculo, o aluno memoriza procedimentos decorrentes da operacionalização das fórmulas. O cálculo que deveria apresentar uma coesão em relação a lógica do conhecimento matemático, apresenta-se estéril enquanto restrito a lógica pura e simples desses procedimentos.

As conseqüências da ênfase dada à lógica do cálculo no processo de ensino são as seguintes:

- na medida em que não se propicia o domínio da lógica intrínseca à elaboração dos conceitos, obriga-se que o aluno mantenha seu raciocínio numa forma passiva já que não é possibilitado a concatenar maiores reflexões que além do nível da assimilação mecânica das fórmulas;

-em conseqüência disto, os procedimentos de ensino que geram essa situação acabam divulgando em sua totalidade uma concepção de matemática estática, já determinada e inclusive arbitrária na medida que o aluno é alijado do processo de apreensão da verdadeira lógica dos conceitos matemáticos.

A correta apreensão dos conceitos exige que se elabore condições de ensino que reflitam uma coerência em relação à lógica do processo de elaboração dos conceitos matemáticos e da operacionalização dessa lógica através da lógica utilizada nos procedimentos de cálculo. Conforme já dito, a estrutura conceitual da geometria analítica retrata, na sua essência, uma reciprocidade existente entre álgebra e geometria mediante um movimento de superação dos procedimentos geométricos pelos procedimentos algébricos, através de uma inclusão desses em relação a aqueles. Em função dessa lógica de elaboração, a execução de procedimentos de ensino ocorre mediante o desenvolvimento de um raciocínio por relação que surge a partir da análise da figura geométrica e da forma algébrica correspondente.

Se esse raciocínio por relação foi aquele que possibilitou o desenvolvimento do conhecimento matemático e o próprio surgimento da geometria analítica, os procedimentos de ensino precisam garantir uma seqüência lógica de raciocínio que permita ao aluno ir usando os dados por relação e não por justaposição. Isto, desde o momento da apropriação dos dados conceituais até a execução dos exercícios. Quanto aos exercícios, é fundamental que se desenvolva nos alunos um raciocínio que siga essa lógica por relações utilizando os dados fornecidos pelo problema. Com isso o aluno raciocina "visualizando" no seu pensamento a construção da figura. Apresentar essa figura graficamente junto ao exercício resolvido torna-se para o aluno um produto de seu raciocínio.

Bastante distinta é a situação em que o aluno chega a fazer a figura depois de resolvido mecanicamente o exercício através da mera operacionalização de fórmulas. Neste caso, a grafia da figura passa também a ser um resultado mecânico. Ela é uma simples representação gráfica dos números encontrados e, como tal, não tem função no raciocínio que move a lógica interna do conhecimento matemático.

Porém, se a figura verdadeiramente for utilizada como guia do raciocínio do aluno, ela estará sendo incorporada enquanto um elemento intrínseco da execução de seu raciocínio. A figura passa a ser vista como um elemento indispensável por ser ela compreendida como o elemento que carrega os dados necessários para a investigação algébrica diante do aspecto relacional ai implícito.

A própria elaboração algébrica dos conceitos da geometria analítica não poderia deixar de carregar essa vinculação com a figura geométrica. Assim, pela análise da figura do conceito a ser investigado elabora-se sua interpretação algébrica.

No caso da reta, ela é determinada por dois pontos quaisquer. Assim, para uma reta "já elaborada" r, um ponto P qualquer do plano de coordenadas (x,y) será um ponto desta reta se para um ponto $Q(x_0, y_0)$ pertencente a r, a reta que passa por P e Q for idêntica a r (fig.54).

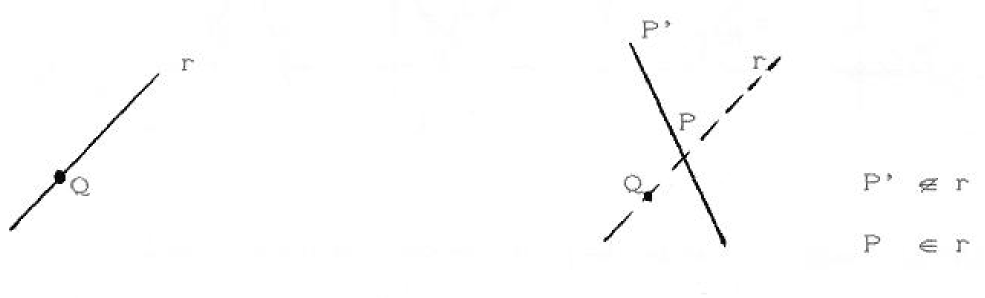


fig.54

Mas como determinar esta identidade ?

A resposta se encontra na análise de casos geométricos específicos. Observando a figura 55, vê-se varias situações de retas dispostas em relação a um sistema cartesiano ortogonal.

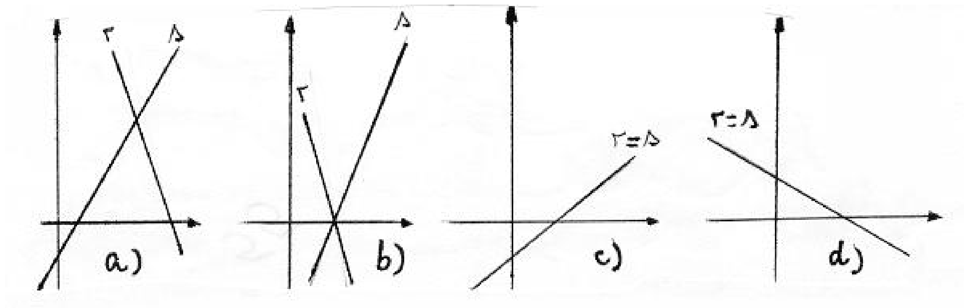
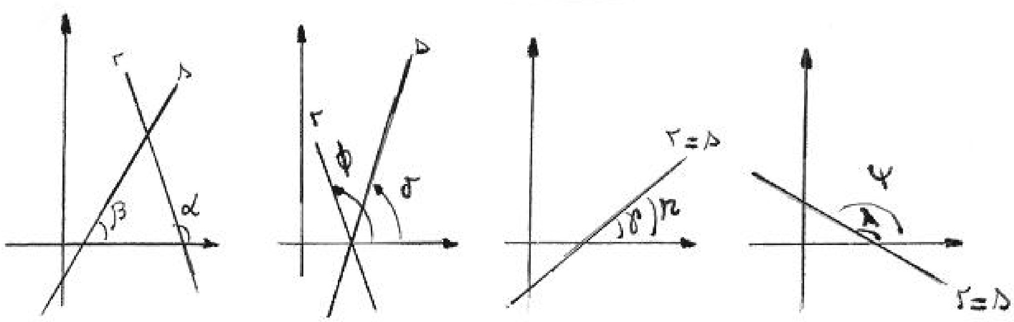


fig.55

Nas situações a,b,c e d todas as retas, necessariamente, fazem um determinado ângulo (considerando por convenção no sentido anti-horário) com relação ao eixo das abscissas.Tem-se no caso a) os ângulos α e β ; no caso b) os ângulos δ e ϕ ; no caso c) os ângulos γ e η e, finalmente, no caso d) os ângulos ψ e λ (figura 56).



Pelas figuras pode-se perceber o que caracteriza a identidade entre duas retas: é o mesmo ângulo determinado pelas retas e o eixo das abscissas. Tanto é assim que, nos casos c) e d) as retas r e s são idênticas e temos $\gamma = \eta$ e $\psi = \lambda$.

Para encontrar uma expressão geral de uma reta é necessário quantificar esta propriedade característica. Para isso considere uma reta t qualquer não vertical e sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois de seus pontos (fig.57).

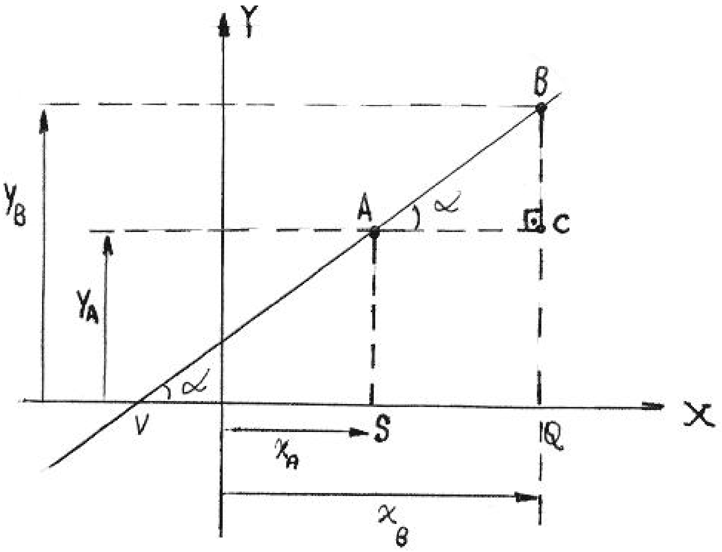


fig.57

O ângulo α é igualmente determinado por AVS e BAC.

Tomando o triângulo DABC , retângulo em C temos

$$\operatorname{tg} \alpha = CB/AC, \text{ isto é, } m = \operatorname{tg} \alpha = (y_B - y_A) / (x_B - x_A)$$

O valor m é denominado coeficiente angular da reta r.

Agora é possível voltar ao problema colocado anteriormente. Tratava-se da elaboração da equação geral da reta. Tinha-se uma reta r, um ponto $Q(x_0, y_0)$ pertencente a r e procurava-se a expressão desta reta para um ponto P(x,y) qualquer.

Se P(x,y) pertence a reta r então, necessariamente, o ângulo α, inclinação da reta r com o eixo das abscissas, será o mesmo determinado por $Q(x_0, y_0)$. Se uma outra reta r' determinada por P(x,y) fosse pensada, r' seria idêntica a r. É natural pensar em calcular o coeficiente angular m nestas condições (fig.58).

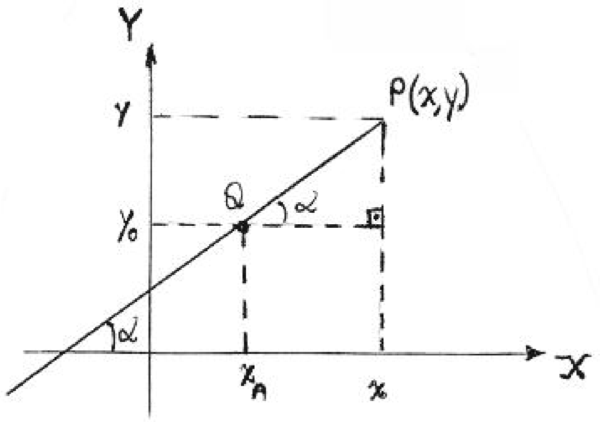


fig.58

Tem-se $m = tg\ \alpha = (y - y_0) / (x - x_0)$

Ou $m = (y - y_0) / (x - x_0)$

O que se pode fazer $m(x - x_0) = (y - y_0)$

Isto é,

$$(y - y_0) = m.(x - x_0).$$

Esta é uma expressão algébrica da equação geral de uma reta.

Dessa equação pode-se obter:

$$y - y_0 = mx - mx_0$$

$$mx + (-1)y + (y_0 - mx_0) = 0$$

O que sempre vai determinar a forma $ax + by + c = 0$, a conhecida equação geral da reta.

É importante observar que a forma $ax + by + c = 0$ não se prende à forma $y - y_0 = m.(x - x_0)$. Se fosse assim, deveria sempre considerar $a = m$, $b = -1$ e $c = y_0 - mx_0$. O que acontece é que a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ é um caso particular da forma $ax + by + c = 0$. Basta considerar b como sendo sempre igual a -1.

Na verdade, a forma $ax + by + c = 0$ retrata uma família de expressões algébricas possíveis para representação de uma mesma reta. Por exemplo, a reta representada pela figura 59 abaixo pode ter como equações:

$y = (\sqrt{3}/3)x + 5 \Rightarrow 3y - \sqrt{3}.x - 15 = 0$

(aqui $a = 3$, $b = -\sqrt{3}$ e $c = 5$).

$7y = (7\sqrt{3}/3)x + 35 \Rightarrow 21y - 7.\sqrt{3}.x - 105 = 0.$

(aqui $a = 21$, $b = -7.\sqrt{3}$ e $c = -105$) ---

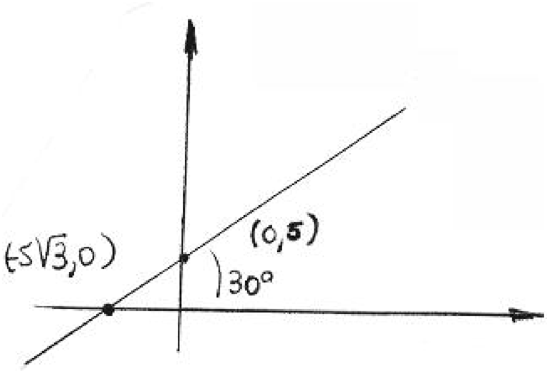


fig.59

Tais exemplos demonstram o dinamismo presente na lógica dos conceitos algébricos e sua relação com a forma geométrica correspondente.

No entanto, o que se vê em muitos livros didáticos é que não chegam a explicitar tal fato. Quando chegam a comentar, isto se dá através de pequenas "notas" destacadas da exposição teórica, não chegando posteriormente a ser trabalhada nos exercícios. Isto jamais possibilita que o aluno apreenda corretamente as relações algébricas utilizadas em função do raciocínio efetuado pelo uso das figuras. Negligencia-se de imediato a gênese dos conceitos, e além disso, refuta-se a manipulação das expressões algébricas. O aluno assimila um conjunto de fórmulas que aprende a utilizá-las em casos específicos pré-estabelecidos através de exercícios-modelos memorizados.

As considerações conceituais aqui apresentadas ilustram a relação entre o concreto das figuras geométricas e o abstrato das expressões algébricas e euclidianas. Os mecanismos lógicos presentes no processo de elaboração dos conceitos matemáticos da geometria analítica evidencia o papel fundamental do concreto das figuras geométricas na medida que materializa as expressões algébricas em sua gênese. Sem a relação entre os pólos concreto e abstrato, a lógica da gênese dos conceitos é distorcida revestindo-se para o aluno num caráter de aleatoriedade.

Já foi observado aqui a função das figuras geométricas como fio condutor do raciocínio dos conceitos da geometria analítica. Entretanto, vale observar que existem situações em que o papel da figura é tão marcante que ela rapidamente determina a forma de ser da expressão algébrica. É o caso da relação entre os coeficientes angulares e lineares das retas. Tal fato é utilizado pelo aluno na resolução do problema aqui proposto porém, sua utilização se dá freqüentemente por mera mecanização. O aluno utiliza a relação entre os coeficientes angulares m e m para que a reta s procurada e a reta (r) $5x - 4y + 7 = 0$ sejam perpendiculares.

No próximo sub-ítem, será analisado o tipo de lógica presente na apresentação dos conceitos de coeficiente angular e linear nos procedimentos de ensino, bem como compreender sua correta elaboração conceitual quanto ao aspecto relacional entre os processos algébricos e geométricos.

III.2.3- Sobre os coeficientes angular e linear.

Conforme já dito, na resolução do problema aqui apresentado, o aluno utiliza a relação entre os coeficientes angulares m_r e m_s para que a reta s procurada e a reta (r) $5x - 4y + 7 = 0$ sejam perpendiculares (a condição imposta pelo problema). Ele utiliza a fórmula $m_r .m_s = -1$.

A utilização da fórmula se dá por mera mecanização, o aluno é induzido a memorizar a fórmula porque efetivamente não compreende a relação entre seus elementos.

O mesmo se dá para as demais posições relativas entre duas retas, isto é, quando as retas são paralelas distintas ($m_r = m_s$ e $h_r \neq h_s$); paralelas coincidentes ($m_r = m_s$ e $h_r = h_s$) e concorrentes ($m_r \neq m_s$). É bom lembrar que m_r e m_s representam respectivamente os coeficientes angulares das retas r e s e h_r e h_s , respectivamente os coeficientes lineares das retas r e s.

Como um incentivo à memorização, muitos livros (principalmente as apostilas de cursos preparatórios para o ingresso às universidades) apresentam uma tabela com todos os casos possíveis das posições relativas entre duas retas. A tabela (fig.60) é a seguinte (OBJETIVO,1990:93):

	(r) $y = m_r x + h_r$ (s) $y = m_s x + h_s$	(r) $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ (s) $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$
r s	$m_r \neq m_s$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
r s	$m_r . m_s = -1$	$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$
r s	$m_r = m_s$ e $h_r \neq h_s$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
$r \equiv s$	$m_r = m_s$ e $h_r = h_s$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

fig.60

Nos livros didáticos a mesma situação ocorre. A relação entre os coeficientes lineares e angulares se prendem à composição literal das equações de retas. Os livros didáticos apresentam as retas r e s como sendo respectivamente $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ e $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$. Através da elaboração teórica em que chegam a apresentar o raciocínio a partir das figuras (as posições das retas) para obter a relação entre os coeficientes, os livros deduzem uma regra para verificar a posição relativa das retas a partir dos coeficientes a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 , e c_2 . Deduzem, então, que para o caso em que r e paralela a s (r //s) tem-se m_r igual a m_s (os coeficientes angulares são iguais). Como m_r é dado por $-a_1 / b_1$ e m_s por $- a_2 / b_2$ então apresentam a relação $a_1 / a_2 = b_1 / b_2$.

Para o caso em que r e s são concorrentes, tem-se os coeficientes angulares diferentes ($m_r \neq m_s$), o que leva a $-a_1 / b_1 \neq -a_2 / b_2$ e daí, $a_1 / a_2 \neq b_1 / b_2$. É então, que é apresentada uma tabela-resumo com os resultados a serem memorizados.

r // s $\iff a_1 / a_2 = b_1 / b_2$

r concorrente a s $\iff a_1 / a_2 \neq b_1 / b_2$

É importante que se análise as duas tabelas.

Primeiramente, quanto a tabela apresentada pelo OBJETIVO, poderia se pensar que a tabela chega a induzir uma relação entre a figura e os dados algébricos correspondentes. Tanto que cada caso inicia-se pela apresentação geométrica.

Porém, tal indução não é verdadeira. Embora apresente a figura, ela surge mesmo como uma representação gráfica de cada caso considerado.

Já no momento da elaboração conceitual, a figura direciona o raciocínio algébrico. Porém, com os resultados algébricos obtidos, a assimilação dos conceitos restringe-se a memorização da relação entre os coeficientes literais envolvidos (a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2).

Percebe-se que as relações entre os coeficientes literais são na verdade mera conseqüência da relação entre os coeficientes, pois, são facilmente obtidos por procedimentos algébricos operatórios. Isto quer dizer que quanto ao aspecto restrito dos resultados algébricos , bastaria perceber que o importante a ser assimilado é o seguinte:

1) m_r é dado por $-a_1 /b_1$ e h_r por $-c_1 /b_1$.

2) m_s é dado por $-a_2 /b_2$ e h_s por $-c_2 /b_2$.

3) para o caso de retas concorrentes a figura geométrica leva à forma algébrica $m_r \neq m_s$. Basta substituir m_r e m_s por seus coeficientes e operar o que for conveniente.

4) para o caso de retas perpendiculares a figura geométrica leva às formas algébricas $m_r \neq m_s$ e $m_r.m_s = -1$. Basta então substituir m_r e m_s pelos respectivos coeficientes literais.

5) para o caso de retas paralelas não coincidentes a figura geométrica leva às formas algébricas $m_r = m_s$ e $h_r \neq h_s$. Basta então proceder as operações algébricas convenientes.

6) para o caso de retas paralelas coincidentes a figura geométrica leva às formas algébricas $m_r = m_s$ e $h_r = h_s$. Da mesma forma, basta substituir m_r , m_s , h_r , h_s pelos coeficientes literais e operar.

Ora, a tabela apresenta resultados operatórios, conseqüência dos fatos acima expostos.

Veja que por exemplo para $m_r \neq m_s$ a tabela apresenta $a_1 / a_2 \neq b_1 / b_2$ .Tal resultado advém do fato:

$m_r \neq m_s$, como $m_r = -a_1 / b_1$ e $m_s = - a_2 / b_2$ então $m_r \neq m_s$ fica $-a_1 / b_1 \neq -a_2 / b_2$.

Invertendo as proposições encontra-se $- a_1 / - a_2 \neq b_1 / b_2$.

E daí $a_1 / a_2 \neq b_1 / b_2$.

O mesmo se dá para os demais casos.

O que se percebe é que no desejo de se assimilar resultados que propiciem uma praticidade cada vez maior na análise deste tipo de conceito, a tabela passa a atrapalhar o aluno até na memorização. A tabela apresenta uma esquematização tão grande do raciocínio efetuado que os resultados expostos acabam sendo mais difíceis de serem assimilados (por memorização) se ao contrário, verdadeiramente respeitarem a lógica de elaboração dos conceitos. A dificuldade nesta memorização reside no fato de que o aluno não apreende a lógica de elaboração dos conceitos ficando obrigado a ver relações entre coeficientes sem nenhum nexo. Perde-se toda a seqüência de raciocínio. A absolutização das expressões algébricas ao serem levadas ao extremo geram situações absurdas como esta, em que a lógica dos conceitos se respeitadas garantiriam eficazmente a apreensão dos conceitos.

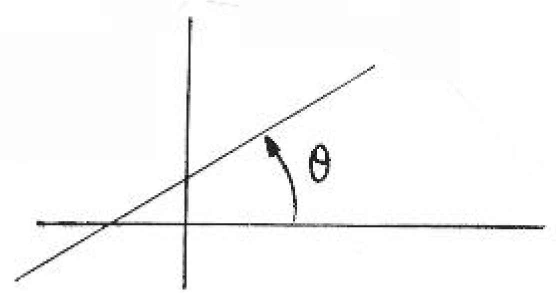
Já no segundo exemplo da tabela, sua constituição nem apresenta a figura (embora no caso do caderno do OBJETIVO a figura seja uma mera representação gráfica do caso considerado). Quanto a sua elaboração, respeita os mesmos desvios na lógica de elaboração dos conceitos da tabela anterior.

Ora, conforme já observado, a figura geométrica enquanto ponto de referência da relação com as expressões algébricas é o ponto de partida para compreensão da geometria analítica, quer no momento da apresentação de seus dados conceituais, quer no momento da apreensão de seus conceitos através da execução de exercícios.

Assim, se considerações a dados geométricos são apresentados nos livros didáticos, a questão central da crítica aos procedimentos de ensino aí colocados está na inutilização desses dados geométricos como condutores de um processo de apreensão dos conceitos desde o estágio de captação da lógica do processo de formação destes conceitos até o estágio de apreensão desses através da elaboração de exercícios.

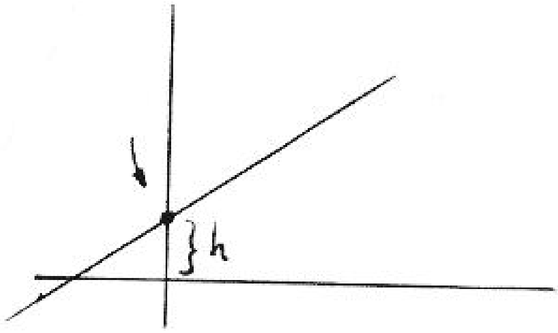
No caso do estudo das posições relativas das retas, para que o aluno desenvolva o raciocínio através da figura é necessário que ele tenha compreendido o significado geométrico dos coeficientes angulares e lineares.

O coeficiente angular é o número real obtido do cálculo da tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abcissas considerado no sentido anti-horário (fig.61).



$m = tg\theta$ fig.61

O coeficiente linear h é o valor numérico de y correspondente a x = 0. Sendo assim, seu significado geométrico nada mais é quando a reta intercepta o eixo das ordenadas (fig.62).

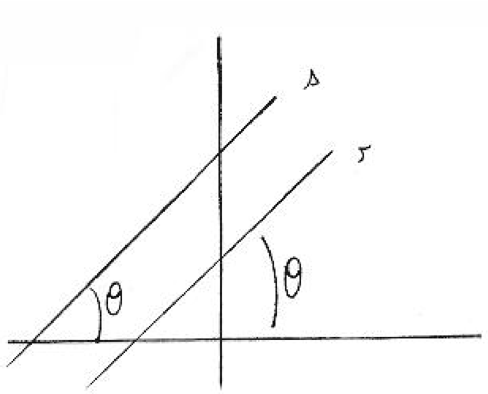


coeficiente linear h fig.62

Tendo claro esses significados, a relação entre os coeficientes angulares e lineares é obtido rapidamente, bastando para isso um pequeno esboço da figura geométrica para cada caso a ser considerado:

a) duas retas paralelas distintas

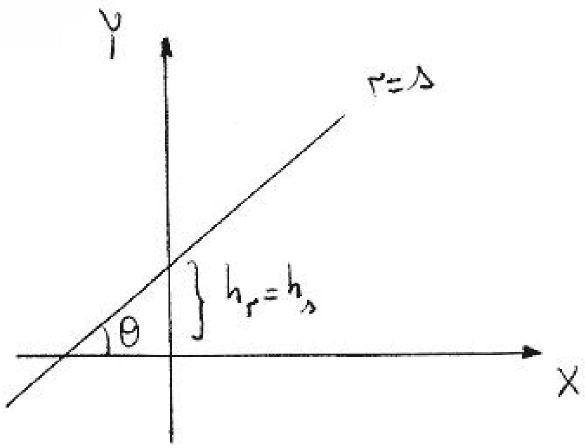
O aluno, raciocinando através da figura geométrica, percebe imediatamente que os respectivos coeficientes angulares são iguais e os coeficientes lineares são diferentes (fig.63).



$m_r = m_s$ $h_r \neq h_s$ fig.63

b) duas retas paralelas iguais

Facilmente se percebe pela figura geométrica que tanto os coeficientes angulares como os lineares são iguais entre si (fig.64).

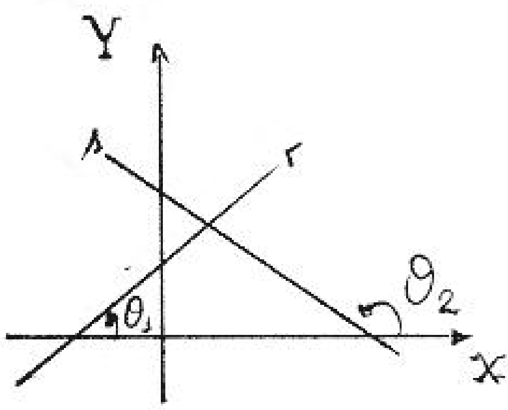


$m_r = m_s$

$h_r = h_s$ fig.64

c) duas retas concorrentes

A figura geométrica mostra que os coeficientes angulares e lineares são diferentes entre si (fig.65).



$m_r \neq m_s$ $h_r \neq h_s$ fig.65

d) duas retas concorrentes perpendiculares

Nesse caso, a figura geométrica não propicia de uma forma imediata a relação entre os coeficientes angulares.

Assim como os coeficientes lineares, os coeficientes angulares são diferentes entre si. Porém, a expressão algébrica da relação entre os coeficientes angulares é obtida a partir de alguns resultados da geometria plana e da trigonometria.

Pela análise da figura 66 tem-se:

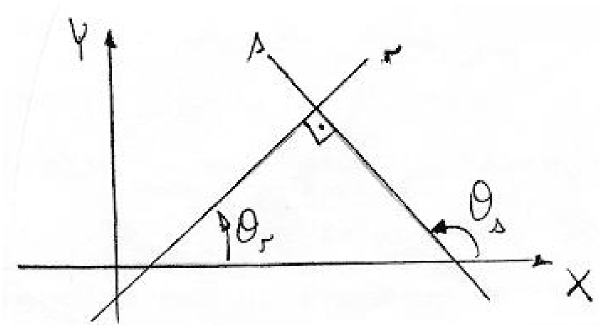


fig.66

$0^0 \leq \theta_r < 180^0$ e $0^0 \leq \theta_s < 180^0$

Como r é perpendicular a s então $\theta_s = 90^0 + \theta_r$ (o ângulo externo θ_s é igual à soma dos ângulos internos 90^0 e θ_r não adjacentes)

$$tg\ \theta_s = tg\ (90^0 + \theta_r)$$

$$tg\ \theta_s = -cotg\ \theta_r$$

$$tg\ \theta_s = -1/tg\ \theta_r$$

$$m_r = -1/m_s \quad \text{ou} \quad m_s \cdot m_r = -1.$$

A fórmula $m_s \cdot m_r = -1$ carrega uma seqüência de dados que foram relacionados através da análise da figura geométrica. Sua utilização, ao dinamizar os aspectos lógicos envolvidos para rápida obtenção dos resultados exigidos, só tem significado se compreendido os elementos que a constituíram. Assim sendo, a lógica do cálculo só ganha significado se compreendida enquanto momento da lógica do conhecimento matemático que, no que se refere a geometria analítica, apresenta-se intimamente vinculada aos procedimentos geométricos. Sem essa compreensão, a fórmula apresenta-se como um elemento arbitrário; a resolução mecânica da fórmula passa a ser para o aluno o próprio conhecimento matemático porque ele não apreende a lógica necessária para compreensão da matemática.

Priorizando os resultados algébricos pela redução de seus aspectos lógicos a mera instrumentalização de fórmulas em detrimento da relação com as figuras geométricas, os procedimentos de ensino revelam uma dicotomia entre as expressões abstratas algébricas e euclidianas, e o concreto das figuras geométricas. Negligencia-se o aspecto relacional recíproco entre álgebra e geometria determinando uma distorção na relação entre seus pólos. As expressões algébricas são reduzidas a fórmulas e as figuras geométricas recebem um papel secundário ao serem utilizadas apenas para justificar o modo de ser das expressões algébricas, isto é, apenas para comprovar ao nível do desenho a forma utilizada com símbolos algébricos. Dessa forma, a figura geométrica aparece como justaposição ao cálculo algébrico. Com isso, ela perde sua função de direção do raciocínio do aluno, direção esta que faz o aluno "visualizar" a figura geométrica no ato de desenvolver o cálculo algébrico.

No tópico a seguir, pretende-se esclarecer como essa dicotomia vai sendo gerada desde o momento da apresentação das coordenadas cartesianas, bem como se processa a elaboração dessas coordenadas em função da lógica própria do conhecimento matemático.

III.2.4- Sobre o sistema cartesiano de coordenadas

O conceito de coordenadas cartesianas é um conceito básico da geometria analítica, na medida em que as coordenadas são os elementos mediadores na relação entre as figuras geométricas e suas correspondentes expressões algébricas.

Diante dessa sua função básica, esse conceito, por ser no processo de ensino o primeiro a ser transmitido e assimilado e por permear todos os demais, ganha uma importância decisiva no contexto do ensino da geometria analítica.

Porém, antes de proceder a análise das coordenadas, é interessante que haja algumas reflexões sobre uma prática muito comum na maioria dos livros didáticos, qual seja, o fato de apresentarem pequenas introduções que tecem considerações gerais sobre o tópico matemático que se inicia. O que é importante observar, é a gravidade de tais introduções na medida em que permeiam em suas considerações, interpretações distorcidas sobre o tópico matemático a ser apresentado, o que colabora negativamente, num sentido mais amplo, para uma correta interpretação da matemática, da sua lógica de elaboração.

Por exemplo em IEZZI (1990:01), a concepção do que seja geometria analítica é apresentada da seguinte maneira:

> Há diversas maneiras de se estudar Geometria. Provavelmente, quem nos lê já deve ter visto um pouco de Geometria Plana no 1º grau e algo de Geometria Espacial no 2º grau. Vamos agora abordar alguns problemas de Geometria Plana, porém com uma técnica diferente das vistas em cursos anteriores. Substituiremos gradativamente as figuras elementares (ponto, reta, circunferência, etc) por elementos algébricos (pares ordenados, equações, etc) e resolveremos problemas geométricos por processos algébricos (analíticos) ". (grifos nossos)

O autor propõe uma mera "troca" de procedimentos geométricos pelos algébricos. Está implícita nessa afirmação que a forma de apresentar o assunto não interfere no conteúdo em si mesmo, e que a "técnica diferente" estaria facilitando ao aluno a apreensão do assunto.

Essa "substituição" das figuras geométricas por elementos algébricos não considera a relação recíproca existente entre os processos algébricos e geométricos. É em decorrência dessa relação de reciprocidade que é possível a substituição de um pelo outro, mas não no sentido empregado pelo autor: uma troca passiva através da dicotomia entre dois elementos envolvidos (ou algébrico ou o geométrico) como se um deles fosse dispensável nesse momento, sem compreender a relação existente entre eles. Além do mais, o significado do conceito de relação implícito nas frases daquele autor é de mera identificação de dois pólos substituíveis um pelo outro. Esse significado restrito retira do aluno a possibilidade de compreender a reciprocidade dos dois pólos distintos, mas complementares, que formam uma unidade indissolúvel. A apresentação do conceito induz o aluno a raciocinar de uma forma unilateral e, portanto, não relacional gerando no aluno, um raciocínio de unilateriedade.

Nota-se ainda que o termo "técnica" utilizado pelo autor para explicar a forma que pretende dar a interpretação dos problemas da geometria plana, está limitado ao significado, também restrito, de mero conjunto de procedimentos operatórios (padronizados numa seqüência considerada correta) que garantam a aplicação de cálculos necessários à resolução de problemas. Desse modo, a concepção do que seja geometria analítica acaba se limitando a execução desses procedimentos. Esses e outros conceitos matemáticos são captados pelo aluno como uma mera seqüência de procedimentos de cálculo.

Além do mais, o trecho acima destacado mostra que a compreensão da lógica dos conceitos da geometria analítica se dá por meio da substituição gradativa de figuras elementares por elementos algébricos. O conceito de relação existente entre os procedimentos algébricos e geométricos empregados pelo autor se dá num significado reduzido, enquanto um momento operatório da substituição de um pelo outro através da relevância de um dos pólos por justaposição.

Embora na verdade ocorra essa substituição, ela se dá sob uma dimensão muito maior do que um mero procedimento operatório. A substituição aí é possível porque no interior de cada pólo da relação existe os elementos constitutivos do pólo oposto. É isso que garante em certos momentos o uso do procedimento operatório da substituição, mas não em seu significado reduzido, de mera técnica pela troca de um e de outro. A substituição é, portanto, o momento (o operatório) da evidência da relação e, por isso, só pode ser empregada com o intuito de revelar os aspectos implícitos presentes na relação entre os pólos. Porém, com a ênfase da lógica de procedimentos operatórios de cálculo em detrimento da lógica do conhecimento matemático, a própria relação entre os pólos é reduzida através de uma apresentação por justaposição, o que não evidencia os elementos relacionais ai implícitos. A dinâmica implícita que permite e justifica a substituição de um ou outro é mascarada mediante essa interpretação dicotomizada de justaposição. Limitado pela ênfase no cálculo, os procedimentos de ensino não desenvolvem o raciocínio do aluno por relação de reciprocidade.

Já em outro livro deste mesmo autor, (IEZZI,1983:1) na introdução intitulada "Geometria e Álgebra fazem as pazes", há o seguinte comentário sobre DESCARTES:

> Seu objetivo [o objetivo de Descartes - JRBG] era por processos algébricos libertar a Geometria da utilização de tantos diagramas que fatigavam a imaginação, e dar significado às operações da Álgebra, tão obscura e confusa para a mente, através de interpretações geométricas .

Nesse caso, o dado histórico revelado pelo autor ressalta a possibilidade de uma reciprocidade entre processos algébricos e geométricos. Porém, este dado histórico é apenas citado, sendo que os procedimentos de ensino elaborados pelo autor (nesse livro e no anteriormente citado) não foram organizados de forma a refletir a reciprocidade desses processos afirmados pelo dado histórico.

O elemento histórico abordado pelo autor é considerado como uma mera curiosidade e, por isso, a reciprocidade é apenas comentada de passagem; ela não é apresentada de forma a conduzir a execução de procedimentos de ensino e, consequentemente, o raciocínio do aluno.

Na verdade, o elemento histórico reflete a essência da estrutura lógica do conceito e, por isso, direciona a execução de procedimentos de ensino de forma a serem coerentes com a lógica dos conceitos presentes no elemento histórico. Ao não levar em consideração este raciocínio, a apresentação de fatos históricos no ensino surge justaposta, simplesmente como um dado curioso.

Voltando, agora, à análise do sistema cartesiano de coordenadas. Inicialmente, no que se refere a como esse conceito é apresentado num livro didático, considere-se o exemplo apresentado em IEZZI(1990:01) (as figuras constam do livro citado; a posição da figura em relação ao texto foi mantida exatamente como no texto original):

2. SISTEMA CARTESIANO

Num plano α, vamos considerar dois eixos, x e y, perpendiculares no ponto O.

Vamos considerar dois eixos x e y perpendiculares em O e seja α o plano que os contem.

Dado um ponto P qualquer, $P \in \alpha$, vamos conduzir por ele duas retas: x' paralela a x e y' paralela a y.

Chamando P_1 a intersecção de x com y' e P_2 a intersecção de y com x', adotamos a seguinte nomenclatura:

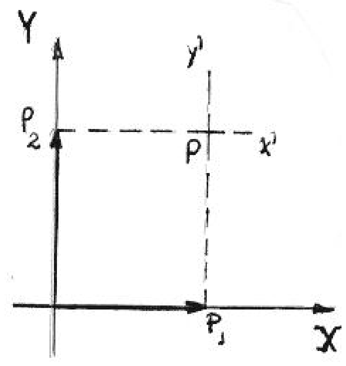
a) abscissa de P e o número real $x_P = OP_1$

b) ordenada de P e o número real $y_P = OP_2$

c) coordenadas de P são os números reais x_P e y_P, geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_P, y_P) onde o primeiro termo e sempre a abscissa.

d) eixo das abscissas e o eixo x (ou Ox)

e) eixo das ordenadas e o eixo y (ou Oy)



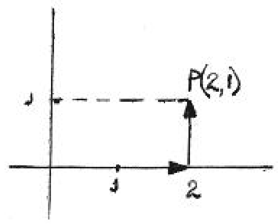
f) sistema cartesiano ortonormal (ou retangular) é o par de eixos Ox e Oy.

g) origem do sistema é o ponto O.

h) plano cartesiano é o plano α.

Assim, a cada ponto P de α fica associado um único par ordenado de números reais (x_P , y_P). Também é verdade que a cada par ordenado de reais (x_P , y_P) está associado um único ponto P de α.

Por exemplo, para determinarmos o ponto P associado a (2,1), a partir da origem, caminhamos duas unidades para a direita (sobre o eixo x) e em seguida uma unidade para cima (paralelamente ao eixo y). Se o ponto P estiver associado ao par (-3,-2), caminhamos a partir da origem três unidades para a esquerda (sobre o eixo x) e duas unidades para baixo (paralelamente ao eixo y).



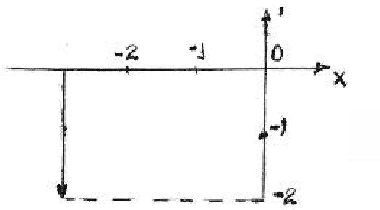


figura extraída do original

Deste modo, fica caracterizada uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais e isto nos dá o direito de identificar o ponto P com o par ordenado que o representa.

O que se pode inicialmente observar é que o sistema cartesiano aqui apresentado exige por parte do aluno uma compreensão anterior da associação recíproca entre pontos e números reais. Embora o autor ao afirmar que " a abscissa de P é um número real $x_P = OP_1$ " e "ordenada de P é o número real $y_P = OP_2$" demonstre a intenção de se compreender esta reciprocidade, a forma como isto é apresentada determina a afirmação de um dado como que já determinado.

O mesmo se dá quanto às coordenadas. O autor as apresenta enquanto uma mera instrumentalização da simbologia dos entes matemáticos envolvidos, sem porém explicar a relação entre o modo de ser das coordenadas e a lógica intrínseca a esta simbologia, sua real justificativa de ser e para que servir.

Sem o domínio da lógica intrínseca à apropriação do conceito de coordenadas o aluno é obrigado a manter todo seu raciocínio numa forma passiva, isto é, não é possibilitado que ele proceda a relação dos dados anteriores apresentados pelo seu raciocínio promovendo, assim, uma assimilação mecânica do conteúdo matemático.

No caso restrito do problema aqui selecionado, as coordenadas nem chegam a ser utilizadas. O aluno no máximo, após a utilização das fórmulas convenientes, procura "visualizar" a reta que corresponde a expressão algébrica 5y + 4x = 0 encontrada. Mas sua execução é um ato mecânico, pois, simplesmente procede a grafia da reta através dos eixos cartesianos sem ter compreendido a lógica relacional implícita na execução da figura.

Nos procedimentos de ensino em geral, esse conceito se dá de uma forma mecânica. Não se esmiuça os aspectos relacionais aí implícitos entre os processos algébricos e geométricos - a essência da geometria analítica. Com os primeiros conceitos que se seguem, isto é, equação da reta, circunferência, etc, o sistema cartesiano freqüentemente passa a não ser empregado. As resoluções se dão através da execução de fórmulas e, quando as coordenadas são utilizadas, isto se dá apenas como uma técnica para "desenhar" a reta ou cônica encontrada através da equação algébrica.

Percebe-se que, dada a absolutização do cálculo, toda a geometria analítica é direcionada para resolução mecanizada de problemas que envolvam cálculos algébricos. Na medida que a lógica que permeia a elaboração dos conceitos não é respeitada, o conceito das coordenadas quase não é utilizado. Quando utilizado, restringe-se a procedimentos mecânicos para construção das figuras geométricas. Sua lógica de elaboração é reduzida a uma técnica para visualizar as figuras geométricas.

A correta apreensão do sistema cartesiano de coordenadas se dá em função da lógica de elaboração da correspondência biunívoca entre pontos e números reais a partir de um aspecto problemático que justifique sua gênese, e não numa forma imediata, dada, como um instrumento que com o decorrer dos conceitos justifica-se seu uso, mas nunca seu real significado.

A gênese do sistema cartesiano se deu a partir da necessidade de se interpretar os conceitos geométricos para a linguagem numérica através da quantificação dos pontos que determinam uma figura qualquer. Para isto, tornou-se necessário a elaboração de um instrumento matemático que propiciasse o estudo numérico da figura. Sendo assim, as coordenadas surgiram enquanto um procedimento próprio para determinar a posição de um ponto da figura através de sua representação numérica (GELFAND,1973:11).

As coordenadas são inicialmente elaboradas a partir da correspondência biunívoca existente entre os números reais e os pontos de uma reta. Uma correspondência biunívoca é uma correspondência em que cada elemento de um determinado conjunto está associado reciprocamente com um único elemento de outro conjunto.

A correspondência biunívoca entre números reais e pontos de uma reta ocorre mediante a construção de um ponto origem como referência (o ponto O), uma unidade de medida μ e uma direção.

Convenciona-se a direita de O, como sendo de sentido positivo; e a esquerda de O, como sendo o sentido negativo (figura 67).

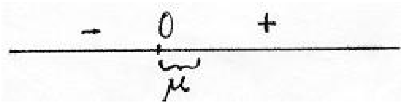


fig.67

Para um outro ponto P na reta, é escolhido uma unidade qualquer de comprimento μ, e a partir daí, faz-se uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta e o conjunto dos números reais da seguinte forma:

Ao ponto P associa-se um número real x como medida de OP sendo μ a unidade de comprimento (fig.68).

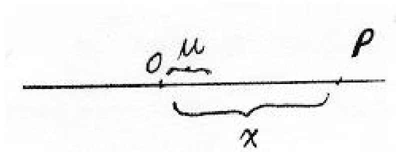


fig.68

Temos OP / μ = x (o segmento unitário μ "cabe" x vezes em OP).

Assim, o ponto P é associado a um número real x sendo que P estará a direita de O, se x for positivo e a esquerda de O se x for negativo. O ponto P fica muito bem determinado pela sua coordenada P(x).

Com isto, o conjunto de pontos pertencentes a reta r é tal que um elemento qualquer deste conjunto pode ser representado pela variável x. A variável x representará a correspondência biunívoca entre um ponto qualquer da reta r e o número real correspondido. Porém, a variável x não se reduz a esse determinado ponto e número real, mas sim, passa a representar qualquer correspondência entre os pontos da reta e os números reais correspondidos. Desta forma, relaciona-se o conceito de variável x a sua expressão geométrica para um conjunto (uma reta).

Diante da reciprocidade entre reta e números reais, se fez possível a elaboração do sistema cartesiano de coordenadas. As coordenadas ao retratarem a representação numérica dos pontos de uma figura, determinaram desta forma, a sua representação algébrica recíproca através da equação elaborada pelos números correspondentes aos seus pontos.

Como tal, a lógica implícita presente nas coordenadas reflete o aspecto relacional entre álgebra e geometria. Consequentemente, a apresentação deste conceito em sala de aula precisa, necessariamente, se pautar na revelação desta correspondência, sem o que o raciocínio relacional não é apreendido pelo aluno.

Optou-se nessa dissertação, em proceder a apresentação do conceito de coordenadas revelando a reciprocidade entre álgebra e geometria da seguinte forma: inicialmente partindo de elementos geométricos procurar-se-á chegar a seu correspondente elemento algébrico. Após isto, será feito o contrário, isto é, partindo de elementos algébricos procurar-se-á chegar a seus correspondentes elementos geométricos.

É importante salientar que o procedimento aqui empregado para esmiuçar a relação de reciprocidade entre a álgebra e a geometria não deve ser entendida enquanto a simples demonstração de mero ato de ir e vir de um pólo a outro relacionado. Esse procedimento tomado apenas em si mesmo não basta para compreender a relação ai implícita existente.

O ato de ir e vir de um pólo ao outro é o procedimento operatório empregado para captar os aspectos relacionais aí presentes.

Se o raciocínio não for direcionado de forma a captar estes aspectos que verdadeiramente levam a compreensão da relação aí existente, o ato de ir e vir da demonstração torna-se um procedimento mecânico.

Conforme já dito, a reciprocidade retrata o aspecto relacional entre as expressões abstratas algébricas e o concreto das figuras geométricas. Sendo assim, o conceito de relação aqui entendido não é estático, não basta simplesmente que se parta de um pólo da relação para se chegar a outro e, depois, proceder o caminho inverso. A relação entre dois pólos mostra que ao se considerar um pólo, é implícito a existência de elementos constitutivos do outro pólo, o que exige a captação de elementos do outro pólo no interior do pólo escolhido.

A opção de se relevar nesse momento do trabalho os dois caminhos da relação se deu exclusivamente pela importância de se poder deixar o mais explicitado possível, a representação dos elementos constitutivos que explicam a reciprocidade existente no interior de um conceito que é básico para os demais.

Assim, primeiramente partindo de elementos geométricos procurar-se-á chegar a elementos algébricos.

II.2.4.1- A elaboração do conceito de coordenadas a partir de elementos geométricos.

Caracterizada a correspondência biunívoca entre o ponto e a reta, o estudo quantitativo das figuras geométricas, isto é, a captação das relações numéricas presentes que constituem as propriedades intrínsecas da geometria das figuras, se dará a partir da representação numérica de seus pontos.

Mas a representação numérica dos pontos de uma figura coloca a necessidade de se estender o conceito de coordenadas para o plano. Esta extensão incorpora a lógica da correspondência presente entre reta e números reais.

A determinação quantitativa dos pontos de uma figura se dará por algum mecanismo matemático que considera a correspondência entre reta e números reais e que também seja feito de tal forma que represente todo e qualquer ponto da figura.

Para representar qualquer figura no plano basta que todo o plano seja igualmente percorrido por essa correspondência entre reta e números reais. Para isso, é necessário criar algum ponto de referência em que toda figura do plano seja quantificada em função desta referência. É importante resgatar o seguinte teorema euclidiano (MOISE,1971:52):

> Dadas duas retas que se interceptam, existe exatamente um plano que as contém.
> (fig.69)

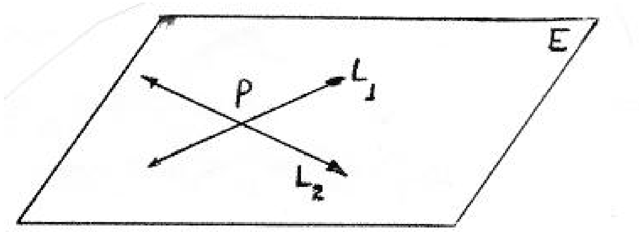


fig.69

Ora, o teorema afirma que o plano fica muito bem determinado por uma relação entre duas retas que se interceptam. Sendo assim, é natural pensar que para o estudo das propriedades numéricas implícitas de toda e qualquer figura no plano, é conveniente utilizar como referência, essas duas retas que determinaram o plano. Para isso, basta que cada uma dessas duas retas sejam correspondidas biunivocamente com os números reais. Assim, um ponto P qualquer da figura ganha sua expressão numérica da seguinte forma:

Denomina-se as duas retas que se interceptam respectivamente por eixos das abscissas (X) e eixos das ordenadas (Y).

No eixo X tem-se uma correspondência biunívoca entre seus pontos e os números reais. O mesmo de dará para o eixo Y. O ponto de intersecção das duas retas será o ponto O (origem) associado ao número real zero. A direita de O pelo eixo X tem-se os números reais positivos e a esquerda de O, pelo mesmo, eixo tem-se os números reais negativos. O eixo Y é orientado de forma a ser positivo o seu semi-eixo a partir de uma rotação de um determinado ângulo do semi-eixo positivo OX. A rotação aqui escolhida é por convenção feita no sentido contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio (fig.70).

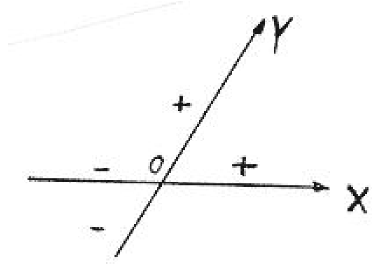


fig.70

A determinação numérica de um ponto P qualquer do plano se dará por uma construção geométrica. Através de P traça-se uma paralela ao eixo Y. Essa paralela, em relação a Y determina com X um ponto x. Ainda em P, traça-se uma outra paralela por P, só que agora paralela ao eixo X. Esta nova paralela determina com Y um ponto y . O ponto P fica assim determinado numericamente no plano pelas coordenadas (x ,y) (fig.71).

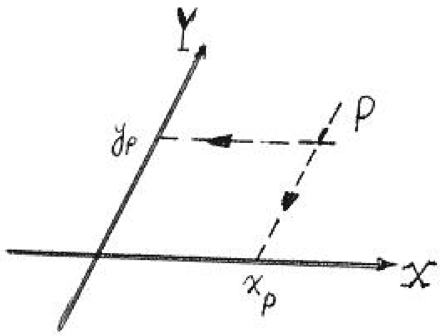


fig.71

Esta determinação é recíproca, isto é, somente (x, y) determina unicamente P. Basta proceder assim:

A partir de O origem determina-se no eixo das abscissas a medida algébrica a de x (fig.72).

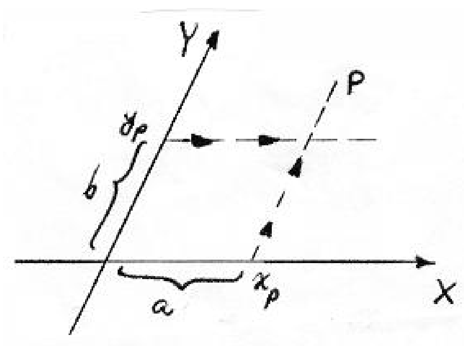


fig.72

Da mesma forma, da origem O pelo eixo das ordenadas determina-se a medida algébrica b de y .

De x ergue-se uma paralela ao eixo das ordenadas Y.

De y ergue-se uma paralela ao eixo das abscissas X.

O ponto de encontro dessas perpendiculares determina unicamente o ponto P.

Assim, para qualquer ponto do plano tem-se sua representação numérica dada pelas suas coordenadas geométricas.

Como havia dito anteriormente, pode-se ensinar a elaboração do sistema cartesiano de coordenadas a partir de considerações geométricas ou algébricas, de forma que, no decorrer dessa elaboração a reciprocidade entre álgebra e geometria seja sempre evidenciada.

A relação de reciprocidade com a álgebra se obtém pela constatação de que cada ponto da figura ao estar associado a sua correspondente coordenada, determina nessa sua representação, uma relação biunívoca entre seus elementos (abscissa e ordenada) através de uma expressão quantitativa peculiar. O conjunto de pontos que compõem uma figura traz consigo uma representação dada por uma equação algébrica. Essa equação algébrica é a expressão matemática da relação quantitativa que rege a composição de uma determinada figura geométrica ao reger a composição de cada coordenada (é bom sempre lembrar que, conforme já explicitado, nem todas as figuras podem ser representadas por meio de equações algébricas).

Por exemplo, considere a reta determinada pelas coordenadas (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (-1,-2), etc. (figura 73)

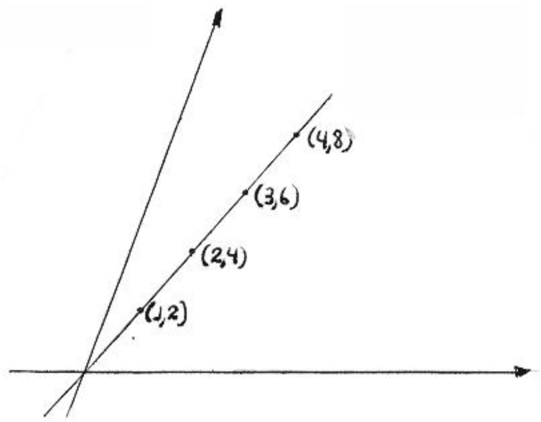


fig.73

Cada coordenada apresenta a propriedade matemática que impõem que a ordenada seja o dobro da sua correspondente abscissa. Consequentemente, a figura geométrica considerada apresenta uma representação algébrica dada pela equação algébrica y = 2x. Existe uma relação biunívoca entre a forma geométrica (a reta) e a forma algébrica (y = 2x) (o que posteriormente será visto com o desenvolvimento dos conceitos, é que a forma de equação relacionará com um tipo de figura geométrica).

Até aqui, foi visto a construção das coordenadas a partir de elementos geométricos.

Considerando agora, o procedimento de forma contrária, isto é, partindo de elementos algébricos, procurar-se-á construir o sistema cartesiano com as coordenadas e, dessa forma, evidenciar a reciprocidade existente entre elementos algébricos e geométricos.

III.2.4.2- A elaboração do conceito de coordenadas a partir de elementos algébricos.

A unificação entre os processos algébricos e geométricos se dá através de uma correspondência biunívoca entre seus conceitos. Porém, para haver uma correspondência entre dois fenômenos quaisquer é imprescindível a existência de um elemento mediador que defina e determine a dinâmica que rege esta correspondência. Esse instrumento matemático é a variável.

Agora, se a variável é o elemento mediador da correspondência, por outro lado, uma correspondência biunívoca determina, pela sua dinâmica, uma relação de igualdade entre as variáveis, já que ao se corresponderem biunivocamente é básico haver uma caracterização do que tem em comum. Percebe-se, portanto, que a essência da correspondência biunívoca se dá através de uma relação de igualdade.

A relação de igualdade é expressa matematicamente por meio de equações algébricas. Uma equação algébrica é a expressão matemática da correspondência biunívoca entre dois ou mais fenômenos observados quantitativamente por meio de uma relação de igualdade. A equação algébrica traz, portanto, a essência da correspondência, a relação de igualdade entre as variáveis.

A equação algébrica terá como sua expressão geométrica a figura geométrica determinada pela relação entre seus pontos e os valores correspondentes às variáveis que constituem a equação.

Qualquer expressão geométrica, assim como qualquer equação algébrica, apresentam especificidades que as caracterizam e as identificam enquanto tais. Porém, a equação algébrica interpretada geometricamente vai se identificar com sua própria expressão geométrica mediante o uso das coordenadas geométricas: as variáveis mediadoras da correspondência entre os processos algébricos e geométricos.

De fato, uma equação algébrica expressa uma análise quantitativa oriunda da correspondência entre fenômenos pela relação de igualdade. Portanto, é implícito no conceito de equação uma correspondência entre duas variáveis relacionadas respectivamente a dois conjuntos numéricos, dada a quantificação de dois elementos que determinaram o fenômeno.

A construção da expressão geométrica da equação se dá a partir da quantificação das figuras geométricas, onde as coordenadas representam os elementos geométricos expressos numericamente para o estudo das propriedades quantitativas presentes nas figuras geométricas.

Porém, para a construção do significado geométrico de uma equação algébrica procura-se a expressão geométrica da correspondência biunívoca entre dois conjuntos numéricos através de suas variáveis. Isto porque, a equação é uma correspondência entre duas variáveis relacionadas respectivamente a dois conjuntos numéricos, dada a quantificação de dois elementos relacionados que determinaram um fenômeno qualquer.

Portanto, para a elaboração da expressão geométrica da equação é necessário mais de uma variável, de forma que as variáveis envolvidas passam a determinar uma correspondência entre pontos do plano e números reais. Percebe-se aqui, uma necessária extensão para o plano.

Desta forma, o modo de proceder a quantificação das figuras geométricas se dará em função de sua expressão algébrica. Assim, a representação simbólica das coordenadas, bem como a elaboração dos eixos cartesianos, se dará em decorrência do conceito de equação.

Para forjar a expressão geométrica de uma equação procura-se a expressão geométrica da correspondência biunívoca entre dois conjuntos numéricos através de suas variáveis. A construção da expressão geométrica da equação também exige uma relação com mais de uma variável, de forma que se determina uma correspondência entre pontos do plano e números reais. Com isto, justifica-se o modo de representação das coordenadas na forma de dois elementos envolvidos, como por exemplo (x, y); além de também esclarecer a elaboração de dois eixos pela necessária extensão para o plano.

Quanto ao fato dos eixos cartesianos se disporem perpendicularmente, é importante que se saiba que até a época de DESCARTES os eixos eram oblíquos. No decorrer da evolução lógica desse conceito, tais eixos tornaram-se perpendiculares. No processo de ensino, a mudança de eixos oblíquos para perpendiculares pode perfeitamente ser demonstrada através da execução de procedimentos que muito bem explicitem o inconveniente da adoção de eixos oblíquos. Tal inconveniente não se dá em relação a determinação de pontos no plano, tanto que até o momento procedeu-se a construção das coordenadas através de eixos oblíquos, mas sim, no momento da execução de cálculos necessários.

Por exemplo, considerando uma situação em que os eixos cartesianos X e Y formam entre si um ângulo de 45º. A representação geométrica de pontos quaisquer como (-1,1), (1,0), (2,1) e (-1,-3) respeitam o mesmo procedimento para representação desses mesmos pontos em eixos cartesianos perpendiculares, isto é, através de retas paralelas aos eixos (figuras 74 e 75 abaixo).

O inconveniente da utilização de eixos não perpendiculares aparecem no momento que torna-se necessário efetuar cálculos para caracterização das propriedades das figuras na medida em que tais cálculos envolvem relações trigonométricas.

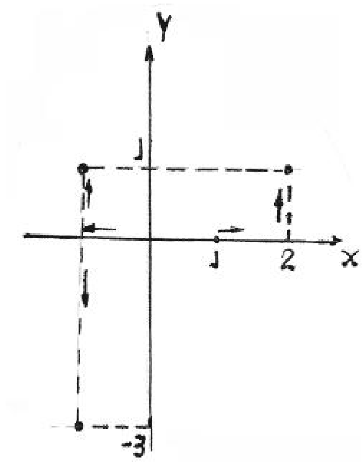


figura 74

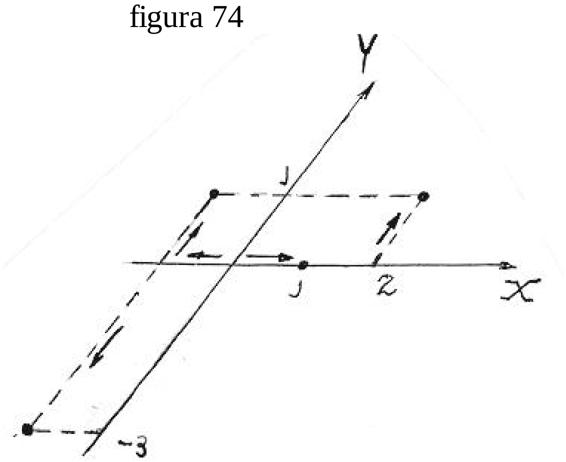


figura 75

Explicando: considere como um exemplo, o cálculo da distância entre dois pontos A e B , isto é, d_{AB} .Teria - se (figura 76):

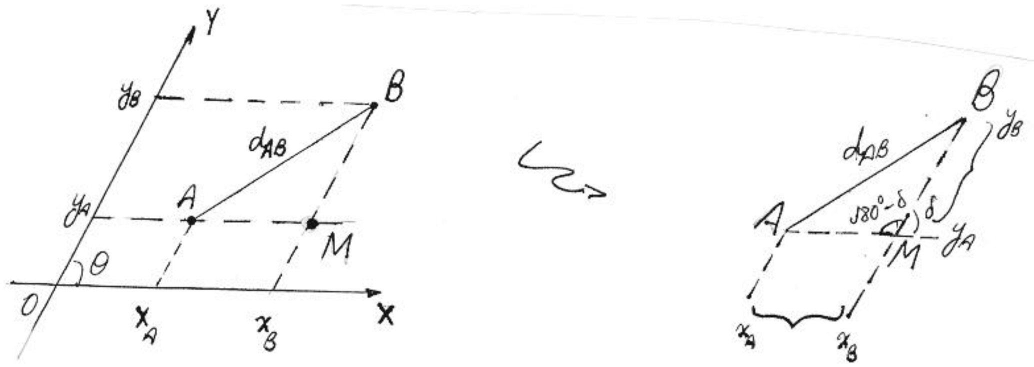


figura 76

Têm-se as coordenadas $A(x_A ,y_A)$, $B(x_B ,y_B)$ e $M(x_B , y_A)$. Pela lei dos cossenos pode-se afirmar que

$$AB^2 = BM^2 + AM^2 - 2.AM.BM.\cos(180^0 - \delta)$$

Como $\cos(180^0 -\delta) = \cos 180^0 .\cos\delta - \text{sen}180^0 .\text{sen}\delta = - \cos\delta$.

Então a expressão acima fica

$$.AB^2 = BM^2 + AM^2 - 2.AM.BM.-\cos\delta.=$$

$$AB^2 = BM^2 + AM^2 + 2.AM.BM.\cos\delta =$$

$$AB = BM^2 + AM^2 + 2.AM.BM.\cos\delta$$

Isto é,

$$d_{AB} = AB = \{ (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + 2.(x_B - x_A).(y_B - y_A).\cos\delta\}^{1/2}$$

Veja que em todo momento haveria o inconveniente do cálculo trigonométrico. Se os eixos cartesianos fossem perpendiculares os cálculos tornar-se-iam mais rápidos, pois, cos90º = 0, e a fórmula acima ficaria simplesmente

$$d_{AB} = \{ (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 \}^{1/2} .$$

As considerações aqui apresentadas evidenciam a necessidade de se efetuar procedimentos de ensino coerentes com a lógica de elaboração dos conceitos. Se compreendida a relação entre as expressões algébricas e geométricas a partir da apreensão correta do sistema cartesiano de coordenadas, os demais conceitos serão direcionados de forma a refletirem também essa reciprocidade. Sendo assim, o próprio desenvolvimento de procedimentos de ensino condizentes com a relação existente recolocará a figura geométrica como a expressão concreta imprescendível para apreensão das estruturas algébricas abstratas.

A análise do ensino de geometria analítica apresentada ao longo deste capítulo procurou enfocar a importância do método dialético de ascensão do abstrato ao concreto para compreensão da lógica relacional entre os processos algébricos e geométricos na superação dos problemas de ensino decorrentes da incompreensão dessa lógica. O objetivo dessa análise foi apresentar subsídios que contribuam para a execução futura de procedimentos de ensino pautados na lógica dinâmica e relacional do conhecimento matemático.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi visto na introdução desse trabalho, um problema muito freqüente no ensino de matemática diz respeito a procedimentos de ensino que transmitem uma aleatoriedade no processo de assimilação dos conceitos, processo esse que determina uma concepção de matemática enquanto justaposição de conceitos arbitrários, pré-determinados e desconexos.

Na tentativa de superação desse problema, muitos professores o identificaram com a necessidade de se estabelecer relações imediatas entre o conteúdo matemático escolar e a vida cotidiana do aluno. Daí, a elaboração de procedimentos de ensino através da associação a problemas prático-utilitários.

A tentativa de correlação entre o desenvolvimento matemático e os problemas prático-empíricos subentende uma interpretação da relação entre o abstrato e o concreto no processo do conhecimento matemático. Tal interpretação resume-se a idéia de que o problema do ensino de matemática esteja em este ser "muito abstrato", sendo necessário torná-lo "mais concreto". Um dos objetivos desta dissertação foi justamente superar essa maneira superficial de abordagem do problema, adotando, para isso, um referencial teórico no qual a relação abstrato-concreto no processo de conhecimento é concebida de uma forma mais frutífera para o enfrentamento dos problemas do ensino de matemática.

Ao longo desta dissertação procurou-se defender a concepção dialética da relação abstrato-concreto, isto é, que o momento da abstração tem, no processo de conhecimento, a função de mediação na passagem do concreto-síncrese ao concreto-síntese.

No entanto, o que se percebe no processo de ensino é a não compreensão da lógica de elaboração dos conceitos matemáticos, a função das abstrações nesse processo. O conhecimento matemático não é visto em seu movimento da síncrese à síntese pela mediação da análise e a relação abstrato-concreto aparece através da dicotomia entre seus pólos: o concreto se reduz ao empírico; o abstrato se reduz a apenas um de seus momentos, o manuseio de fórmulas matemáticas. Dai, a operacionalização de fórmulas em detrimento da lógica de elaboração dos conceitos.

Este trabalho procurou caracterizar particularmente como se manifesta a dicotomia entre o abstrato e o concreto no ensino de geometria analítica, onde todo o aspecto relacional entre os processos geométricos e algébricos reduz-se a uma associação mecânica entre o grau da equação algébrica e sua correspondente curva, isto é, sua representação geométrica por meio da operacionalização de técnicas algébricas. O tratamento utilizado é meramente algébrico, sendo que a correspondente curva geométrica vem a reboque, associada mecanicamente ao seu correspondente resultado algébrico obtido. Assim, os procedimentos de ensino contidos na maioria dos livros didáticos não procuram elaborar etapas de ensino que levem o aluno a apropriar-se das formas mais desenvolvidas do processo de elaboração dos conceitos. Em vez disto, os procedimentos apresentam logo de imediato apenas um aspecto do produto final deste processo de construção: a operacionalização das fórmulas resultantes da associação entre curvas e equações.

Essa ênfase nas fórmulas revela uma dissociação entre os procedimentos algébricos abstratos e as relações intrínsecas às figuras geométricas.

Consequentemente, sem a execução de procedimentos que explicitem os mecanismos lógicos presentes no processo de elaboração dos conceitos, a relação entre curva e equação é reduzida a uma associação mecânica entre um e outro. A apropriação dos conceitos pelo aluno não ultrapassa assim, o nível já mencionado de apropriação por analogia.

É bom lembrar que o termo "abstrato" utilizado neste trabalho referiu-se ao todo conceitual que abrange as equações algébricas e os conceitos euclidianos. O mesmo quanto ao termo "concreto" que se referiu a figura geométrica. Trata-se de um concreto-caótico dentro do sentido da análise aqui desenvolvida da relação abstrato-concreto na geometria analítica. É concreto-caótico, pois, não são explicitadas suas propriedades. As figuras geométricas tornar-se-ão concreto-pensado na medida em que, ao serem mediadas pelas abstrações algébricas e euclidianas, obtém-se uma compreensão da multiplicidade de suas determinações.

Além do mais, a dicotomia entre o abstrato e o concreto no ensino de geometria analítica não decorre necessariamente do nível de abstração dos conceitos matemáticos, pois, não se entende aqui o termo "concreto" como aquilo que tenha existência física. Enquanto categoria do método dialético, o concreto é a "rica totalidade de numerosas determinações e relações". Assim, a superação da dicotomia entre abstrato e concreto não se efetiva pela "aproximação" das abstrações matemáticas a problemas prático-utilitários ou mesmo a problemas científico-tecnológicos.

A superação da dicotomia entre abstrato e concreto no ensino de matemática, na óptica do método dialético, significa alcançar um tal nível de relacionamento entre as abstrações que possibilite a elaboração de um sistema orgânico e multirelacional que englobe e dê sentido às abstrações. Desta forma, as abstrações deixam de ser compreendidas enquanto abstrações vazias, desvinculadas de qualquer relação. Esmiuçada a lógica operatória presente nas abstrações, elas se tornam a mediação para a construção do concreto no pensamento. Na matemática, quanto mais se afasta da realidade concreta, mais organicamente se atrela a ela graças à lógica de elaboração dos conceitos que transfere a cada etapa conceitual um caráter de concreticidade para a etapa seguinte.

A compreensão da gênese dos conceitos da geometria analítica revela a necessidade da elaboração e execução de procedimentos metodológicos de ensino que reflitam o aspecto relacional entre álgebra e geometria. Sem o exercício desse aspecto relacional, seus conceitos passam a ser interpretados como entidades pré-determinadas, abstratas por si mesmas no sentido de formas estéreis sem justificativas. São necessários procedimentos de ensino que propiciem às abstrações sua incorporação à totalidade concreta mediante a constatação de que a figura geométrica é o ponto de partida e de chegada do processo de elaboração dos conceitos e, como tal, os resultados algébricos se edificam na figura geométrica e, por isso, passam a ser entendidos.

A concreticidade das abstrações só é possivel mediante a compreensão da gênese dos conceitos da geometria analítica na medida em que através desse processo de elaboração é possivel captar a lógica que determina e engendra os conceitos, e que por isso, passa a nortear a execução de procedimentos de ensino coerentes a essa lógica.

O entendimento dos aspectos teóricos implícitos no par categorial abstrato-concreto revelou ser essa relação, a essência lógica do processo de elaboração dos conceitos na sua forma mais desenvolvida, na lógica do produto. Compreender melhor como essa lógica do produto foi gerada pelo processo é captar a realização dessa relação ao longo de sua história. Mas o processo histórico não se identifica com o processo de elaboração dos conceitos através da ascensão do abstrato ao concreto como a análise do Método da Economia Política de MARX(1983:218) demonstrou. Há de se compreender a especificidade histórica de cada momento, de se perceber, na forma mais desenvolvida dos conceitos, os aspectos essenciais do desenvolvimento histórico, mas não necessariamente na mesma ordem em que esses aspectos apresentam na forma mais elaborada. O capitulo II deste trabalho, procurou evidenciar a historicização dessa relação para o melhor entendimento dos conceitos hodiernos da geometria analítica.

Naquele capítulo, compreendeu-se que a elaboração dos conceitos da geometria analítica retrata o momento histórico da matemática no qual ocorreu uma superação dos procedimentos de construção geométrica euclidiana cujas limitações haviam se transformado num entrave para construção de novos conceitos.

Inicialmente, dado o grande desenvolvimento atingido pela matemática grega, os demais povos respaldaram-se na estrutura lógico-dedutiva dessa matemática. Tanto que o inicio do processo de elaboração dos procedimentos algébricos entre os hindus e árabes que se seguiria, se pautaram, no que se refere a sua validade lógica, em demonstrações geométricas.

Mas essa ênfase pela geometria entre os gregos escamoteava a grande deficiência de sua matemática: a incapacidade de um tratamento numérico satisfatório para os números irracionais. A saída paliativa encontrada pelos gregos para este problema foi o tratamento geométrico dos cálculos através de segmentos que poderiam ser grandezas incomensuráveis ou comensuráveis, enfim a álgebra geométrica.

Ocorre que a ênfase no tratamento geométrico viria a determinar uma dicotomia entre os procedimentos de cálculo e os procedimentos geométricos. O crescente desenvolvimento da álgebra seguiu-se paralelamente a sua justificativa geométrica. A álgebra e a geometria passaram a ser vistas como disciplinas desconexas.

Mas a maturidade das técnicas algébricas que se seguiu viria a criar as condições necessárias para o surgimento da geometria analítica na medida que tais procedimentos algébricos passaram a investigar os procedimentos geométricos dos antigos geômetras. Essa capacidade própria de investigação algébrica demonstrou um nível de elaboração conceitual em que agora, as formas algébricas poderiam se desvincular de sua justificativa geométrica. Os procedimentos algébricos transformaram-se em instrumentos poderosos de investigação das formas concretas das figuras geométricas que foram sua origem. A relativa autonomia dos procedimentos algébricos é o aspecto positivo do processo de elaboração dos conceitos da geometria analítica. No entanto, a história da formação dos conceitos da geometria analítica viria também a perpetuar essa dicotomia. Tanto é assim, que o próprio DESCARTES não procurou associar curvas e equações, mas apenas apresentar um novo procedimento para o aprimoramento das construções geométricas.

Essa investigação caracterizou-se como uma nova etapa na história da matemática em que se viu um movimento de superação dos procedimentos geométricos pela utilização dos procedimentos algébricos através de uma incorporação desses próprios procedimentos geométricos na medida em que os conceitos algébricos ao investigarem os resultados euclidianos, passaram a ter suas correspondentes representações geométricas.

Sendo assim, a estrutura conceitual da geometria analítica retrata em sua essência este movimento de superação por incorporação dos conceitos matemáticos, movimento esse, decorrente da reciprocidade entre os procedimentos algébricos e geométricos. No interior desse processo de elaboração, o concreto dado pelas figuras geométricas é o ponto de partida e de chegada do processo de conhecimento. Consequentemente, os procedimentos de ensino passam a ser organizados de forma que as figuras geométricas passam a ser o fio condutor do processo de apreensão dos conceitos desde a caracterização da lógica do processo de formação destes até o estágio de apreensão destes através da elaboração de exercícios.

Da análise da problematização decorrente da dicotomia entre o abstrato e o concreto aqui desenvolvida há de se destacar alguns aspectos aí implícitos que não se limitam à análise específica do ensino da geometria analítica, mas que se enquadram como considerações importantes para análise do ensino da matemática em geral.

Primeiramente, quanto à questão dos conteúdos no processo de ensino. Há muito tempo é assumida a posição de que um "bom professor de matemática" é aquele que "domina os conteúdos matemáticos". Isso, inclusive justifica que a estrutura curricular das licenciaturas na maioria dos casos não passe de uma cópia do bacharelado, com a mera retirada de algumas disciplinas "de conteúdo" e inserção das disciplinas "pedagógicas".

A questão, porém, não se coloca quanto ao maior número de disciplinas voltadas para o conteúdo específico de matemática ou para a formação pedagógica. A questão central aí colocada é a de que se é indiscutível que o domínio do conteúdo seja necessário para quem dirige o processo de ensino-aprendizagem, mais questionável ainda é o significado de "domínio do conteúdo". No caso da geometria analítica aqui apresentado, mostrou-se que o conteúdo, apesar de plenamente rico de relações entre seus conceitos, não gera por si mesmo um tipo de ensino por relações. É preciso que as relações existentes no conteúdo sejam apropriadas conscientemente pelo professor e executadas através de procedimentos eficazes no sentido de tais relações sejam reveladas aos alunos, e por eles, captadas e trabalhadas.

Sendo assim, a questão do domínio do conteúdo matemático exige algo mais. Há de se compreender a relação entre a forma de apresentação dos procedimentos de ensino em função do conteúdo matemático verdadeiramente relacional aí existente. Isto quer dizer que, enquanto não se compreender o dinamismo implícito do processo educativo não será possível superar seus problemas com medidas unilaterais que ora enfatizam a questão dos conteúdos, ora enfatizam a forma de se apresentar esses conteúdos. Aliás, a ênfase na forma tem sido muito freqüente nos trabalhos "alternativos" apresentados nos congressos em educação matemática. Vê-se a utilização de criativos materiais didáticos na apresentação dos tópicos matemáticos, sem que a utilização de tais materiais esteja fundamentada numa concepção global do processo de conhecimento, do processo educativo. Em algumas vezes, parece que o único objetivo de certos materiais, ou ao menos da forma como eles são utilizados, é o de permitir uma apreensão "mais agradável das enfadonhas abstrações matemáticas".

Essa questão da elaboração e execução de materiais didáticos alternativos como solução para a eficácia do modo de apropriação dos conceitos, revela ser conseqüência de um outro aspecto já apresentado no início dessas "considerações". Trata-se da necessidade do educador utilizar um método de investigação coerente, eficaz, que o instrumentalize para análise dos problemas do ensino de matemática. A importância da compreensão dessa exigência reside no fato do salto qualitativo que deve ser atingida a pesquisa em educação matemática. Há de se superar o nível superficial, imediato de análise dos problemas desse ensino decorrente da falta de clareza na adoção de critérios lógico-metodológicos que orientam essa análise. Sobre um certo aspecto, tais análises agravam o ensino dessa disciplina, pois, subentendem-se que os problemas aí decorrentes estejam superados.

Mas a tarefa aí colocada para essa superação exige como fator precípuo, a correta compreensão da lógica dos conceitos matemáticos, seu processo de elaboração, sua produção conceitual. A concepção aqui adotada acerca da produção matemática, buscou contribuir para a superação tanto das interpretações idealistas de seus conceitos, quanto das interpretações superficiais (como associar o conteúdo matemático a problemas prático-utilitário como tentativa de tornar a matemática "mais próxima do real").

Mas, na investigação dessa relação, um outro instrumento lógico-metodológico se destaca: trata-se da relação lógico-histórica.

A relação lógico-historica é importantíssima para a compreensão da lógica de elaboração dos conceitos na medida em que toda e qualquer re-elaboração dos procedimentos de ensino orientados para captação da lógica de elaboração dos conceitos requer um estudo de sua gênese captada ao longo de seu processo histórico de formação.

É interessante notar como esse instrumento se manifesta de uma forma unilateral em muitos professores, quer enfatizando o pólo histórico dessa relação, quer enfatizando o pólo lógico, mas nunca entendendo a relação entre eles.

Aqueles que priorizam o histórico, o fazem interpretando esse pólo da relação como sendo o fato de se enxertar elementos históricos na apresentação do conteúdo matemático. No entanto, tal interpretação revela-se um equívoco, há de se entender a relação lógico-histórica. Conforme foi explicitado nessa dissertação, há de se ver na história apenas os aspectos essenciais que determinam a forma lógica mais desenvolvida dos conceitos, isto é, a lógica do produto. Não compreendem que o processo histórico não revela na sua formação, uma seqüência sistemática, intencionalmente determinada e que, ao contrário, o processo de transmissão-assimilação dos conceitos exige essa determinação, essa intencionalidade para elaboração e execução dos conteúdos.

Quanto aqueles que priorizam o lógico, não entendem esse lógico como resultante de um processo, processo esse que se capta ao longo do histórico. Sendo assim, essa incompreensão determina uma seqüência de ensino organizada de forma arbitrária, pré-determinada, injustificada. Além do mais, o que é o mais importante, como observa DUARTE(1987:07), aquilo que poderia parecer o mais lógico para o matemático, pode não ser necessariamente o mais lógico para quem está no processo de aprendizagem da matemática.

Há, portanto, que superar tais interpretações unilaterais e aprimorar cada vez mais a compreensão das especificidades dessa relação para sua utilização na investigação do processo lógico-histórico de elaboração dos conceitos.

Uma outra questão que surgiu nessa dissertação, diz respeito à passagem do ensino de matemática do 2º para o 3º graus. Mais especificamente, trata-se da lógica de elaboração do cálculo infinitesimal. Quando da análise da saída paliativa adotada pelos gregos para o tratamento de grandezas incomensuráveis (saída paliativa, na medida em que os gregos não elaboraram uma solução numérica que envolvesse o reconhecimento de tais números), o autor dessa dissertação serviu-se de uma citação de KLINE (1972:34) em que era mencionada a relação entre o contínuo e o discreto. Tal relação revela-se fundamental para o entendimento do cálculo infinitesimal e, a partir daí, elaborar procedimentos de ensino eficazes que garantam a compreensão dessa mudança de enfoque na matemática. Aliás, pode-se com certeza afirmar que a falta de compreensão dessa relação tem contribuído em muito, para a crescente dificuldade encontrada pelos alunos nas disciplinas de matemática exigidas nos cursos de graduação.

Muitas outras questões podem ser suscitadas através da leitura desse trabalho. A grave situação em que se encontra o ensino de matemática exige o comprometimento urgente de um número cada vez maior de educadores para superação de tais questões, e tantas outras que não estão ai implícitas. De início, é necessário mais do que nunca, uma conscientização da complexidade teórica e metodológica necessária na execução dessa tarefa.

A proposta desta dissertação foi a de enfrentar essa complexidade e, nesse enfrentamento, caminhar na aprendizagem da investigação na área educacional.

BIBLIOGRAFIA

AABOE, Asger. Episódios da história antiga. Rio de Janeiro: Paz Editora, 1984. 170 p.(Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, Sociedade Brasileira de Matemática).

ABREU, Carlos F. de. Geometria analítica. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1963. 254 p.

AFANASSIEV, V. G. Teoria do conhecimento do materialismo dialéctico. In: __________ . Fundamentos da filosofía. URSS: Edições Progresso, 1982, p.157-188.

ALQUIE, Ferdinand et al. Galileu, Descartes e o mecanismo. Portugal: Gradiva Publicações, 1987. 98 p.

APOLLONIUS - Conics. In: Great books of the western world. EUA: Encyclopaedia Britannica, 1952, p. 603-804.

BARON, Margareth E., BOS, H.J.M. Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. (Unidades I e II).

BELL, E. T. Men of mathematics. New York: Simon and Schuster, 1937. 592 p.

BOCHNER, S. The role of mathematics in the rise of science. New Jersey: Princeton University Press, 1966. 386 p.

BOULIGAND, G., DESBATS J. La mathematique et son unité: introduction aux elements de l'analyse et a la philosophie des sciences deductives. Paris: Payot, 1947. 311 p.

BOULOS, Paulo, WATANABE, Renate. Matemática 2ºgrau. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1978. v.3. 240 p.

BOYER, C. B. História da matemática. 3ªed. São Paulo: Edgard Blycher, 1981. 488 p.

BRONSTEIN. I., SEMENDIAEV, K. Manual de matemática para engenheiros e estudantes. 2ªed. URSS: Editora Mir, 1979,832 p.

CABRERA, EMANUEL S. Los elementos de Euclides como exponente del "milagro griego". Buenos Aires: Libreria del Colegio,1949. 149 p.

CARAÇA, Bento de J. Conceitos fundamentais da matemática. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984. 318 p.

CHASLES, M. Aperçu historique sur l'origine et le developpement des methodes en geometrie. 2ªed. Paris: Gauthier-Villars Imprimeur-Libraire, 1875. 550 p.

CHEPTULIN, Alexandre. A Dialética materialista. São Paulo: Alfa-Ômega, 1982. 354 p.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Da realidade à ação: reflexões sobre a educação e matemática. São Paulo: Summus Editora, 1986. 115 p.

DAVIS, Philip J. & HERSCH Reuben - A experiência matemática. Franscisco Alves, Rio de Janeiro, 1985.

DESCARTES, R. Discurso do método. 3ªed. Portugal: Publicações Europa-América, s/d. 146 p.

______________ . Geometry. In: Great books of the western world. USA: Encyclopaedia Britannica, 1952. v. 31, p. 295-353.

______________ . La geometrie. In: COMTE, Auguste. La Geometrie Analytique. Paris: Typographie Edmond Monnoyer, 1894, p.01-107.

DUARTE, Newton. A relação entre o lógico e o histórico no ensino da matemática elementar. São Carlos, S.P. : UFSCar, 1987. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Carlos.

______________. O compromisso político do educador no ensino da matemática. In: OLIVEIRA, Betty A., DUARTE, Newton. Socialização do Saber Escolar. 4ªed. São Paulo: Cortez Editora, 1987a. p. 77-89.(Coleção Polrmicas do Nosso Tempo, 18).

ENGELS, Friedrich. A 'Contribuição à Critica da Economia Politica' de Karl Marx. In: MARX, Karl, ENGELS, Friedrich. Obras Escolhidas. São Paulo: Alfa-Pmega, s/d. 378 p. (v.1).

EUCLIDES. Elementos de geometria. 2ª ed. São Paulo: Edição Cultura, 1945. 324 p.

EVES, Howard. Great moments in mathematics (before 1650). USA:The Mathematical Association of America, 1983. (nº5).

FIGUEIREDO, Djairo G. de. Números irracionais e transcendentes. Rio de Janeiro: Editora Gráfica Alterosa, s/d. 101 p. (Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, Sociedade Brasileira de Matemática).

GELFAND, I., GLAGOLIEVA, E., KIRILLOV, A. El metodo de coordenadas. 2ªed. URSS: Editorial Mir, 1973. 95 p.

HEATH, T. The thirteen books of Euclid's elements. New York: Dover Publications, s/d. 418 p. (v. 1).

_______ . A history of greek mathematics. New York: Dover Publications, s/d. v. 1. 446 p.

HOGBEN, L. Maravilhas da matemática. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1956. 762 p.

IFRAH, Georges. Os números: a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1989. 367 p.

IEZZI, G. et al. Fundamentos de matemática elementar: geometria analítica. 2. ed. São Paulo: Atual Editora, 1983. v. 7. 229 p.

________________. Matemática 2ºgrau. 8ªed. São Paulo: Atual Editora, 1990. 285 p. (30 ano).

KARLSON, Paul. A magia dos números. Porto Alegre: Editora Globo, 1961. 608 p. (Coleção Tapete Mágico).

KLINE, Morris. O fracasso da matemática moderna. São Paulo: IBRASA, 1976. 211 p.

____________. Mathematical thought from ancient to modern times. New York: Oxford University Press, 1980. 1238 p.

____________.Mathematics in western culture. 10ªed. New York: Oxford University Press, 1970. 484 p.

KOPNIN,P.V.A Dialética como lógica e teoria do conhecimento. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira, 1978. 354 p.

KOSIK, K. Dialética do Concreto. 3ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1985. 230 p.

KOVALHOV, S. Materialismo dialético e histórico. Portugal: Novo Curso Editores, 1980.

KRAMER, Edna E. Father of modern mathematics and his legacy. In: ___________.The main stream of mathematics. Oxford University Press, New York, USA, 1955, p.133-153.

KRIKORIAN, Gregorio, KRIKORIAN Jorge. Geometria analítica. In: ______________ . Geometria de posição, métrica e analítica. São Paulo: Editora Parma, 1987. p. 94-158. (Coleção Objetivo, 40, 41 e 42).

LEFEBVRE, H. Lógica formal / Lógica dialética. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira, 1987.301 p.

LEONTIEV, A. O biológico e o social no psiquismo do homem. In: _________. O desenvolvimento do psiquismo. Lisboa: Horizonte Universitário, s/d. p. 233-258.

LORIA, G. Pour une histoire de la geometrie analytique. In: Verhandlungen des dritten internationalen mathematiker kongresses. 1904, Heidelberg. p. 562-574.

_________. Histoire des sciences mathematiques dans l'antiquite hellenique. Paris: Gauthier-Villars, 1929. 215 p.

LOWELL, Julian C. A history of the conic sections and quadric surfaces. Oxford: Clarendon Press, 1945.

LURIA, A.R. Diferenças culturais de pensamento. In: VIGOTSKII,L.S., LURIA, A. R., LEONTIEV, A. N. Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem. São Paulo: Icone Editora Universidade de São Paulo, 1988. p. 39-58.

MACHADO, Nilson J. Matemática e realidade. São Paulo: Cortez Autores Associados, 1987. 103p. (Coleção Educação Contemporsnea).

________________ . Matemática e língua materna. São Paulo: Cortez Autores Associados, 1990. 169 p. (Coleção Educação Contemporsnea).

MARMO, C. M. B. Curso de desenho: cônicas. São Paulo: Editora Moderna, 1966. 104 p. 4 v.

MARX, K. O método da economia política. In:__________.Contribuição à crítica da economia política. 2ª ed. São Paulo: Martins Fontes Editora, 1983. p. 218-226

MOISE, E. E., DOWNS, L. Geometria moderna. São Paulo: Editora Edgard Bltcher, 1971. 544 p.

NOBILIONI, Giuseppe et al. Matemática: caderno Objetivo. São Paulo: Objetivo, 1990. Apostila. (n. 5)

OLIVEIRA, Betty. Implicações sociais inerentes ao uso dos procedimentos pedagógicos: um exemplo. In: OLIVEIRA, Betty,DUARTE, Newton. Socialização do Saber Escolar. 4ªed. São Paulo: Cortez Editora, 1987. p. 47-76. (Coleção Polrmicas do Nosso Tempo, 18).

PAPELIER, G. Geometrie analytique a deux dimensions. In: ___________. Precis de geometrie analytique. 12 ed. Paris: Librairie Vuibert. 1950. p. 1-440.

PINTO, A. V. Ciência e existência: problemas filosóficos da pesquisa cientifica. 2ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra. 537 p. (Série Rumos da Cultura Moderna, 20).

POLITZER, G., BESSE, G., CAVEING, M. Princípios fundamentais de filosofia. São Paulo: Hemus Editora, s/d. 396 p.

PRADO, C. J. Dialética do conhecimento. São Paulo: Editora Brasiliense, 1952. 736 p.

RADICE, L. L. A Matemática de Pitágoras a Newton. Lisboa: Edições 70, 1985. (Biblioteca Basica de Ciências). 115 p.

RAMBALDI, E. Abstracto/concreto. In: ENCICLOPEDIA EINAUDI: Dialéctica. Portugal: Imprensa Nacional, v. 10, 1988, p.175-225.

RANGEL, A. P. Curvas. Rio de Janeiro: Serviço Industrial Gráfico Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1974.252 p.

ROSENTAL, M. M., STRAKS, G. M. Categorias del materialismo dialéctico. 4ª ed. México: Editorial Grijaldo, 1960.

RUBANO, D. R., MOROZ, M. A dúvida como recurso e a geometria como modelo: René Descartes. In: ANDERY, M.A. et al. Para compreender a ciência: uma perspectiva histórica. Rio de Janeiro: Editora Espaço e Tempo, 1988, p.198-208.

SAVIANI, Dermeval. Educação: do senso comum à consciência filosófica. 5ª ed. São Paulo: Cortez Editora, 1985. 224 p.

________________. Escola e democracia. 7ª ed. São Paulo: Cortez Editora, 1985. n. 5. 96 p. (Coleção Polêmicas do Nosso Tempo, 5).

SMITH, D. E. History of mathematics. New York: Dover Publications, v. 2, s/d. 703 p.

SOUZA, Antonio C. C. de Matemática e sociedade: um estudo das categorias do conhecimento matemático, São Paulo: UNICAMP, 1986. 154 p. Dissertação (Mestrado) - Metodologia de Ensino, Universidade Estadual de Campinas, 1986.

STILLWELL, John. Mathematics and its history. New York: Springer-Verlag, 1989. (Undergraduate Texts-Mathematics).

STRUIK, J. A Concise history of mathematics. 3ªed. New York: Dover Publications, 1967. 195 p.

TEIXEIRA, Jose Carlos et al. Matemática: geometria analítica plana. São Paulo: Editora Anglo, 1984. 155 p.(Sistema Anglo Ensino, 19).

VASCONCELLOS, F. A. História das matemáticas na antiguidade. Lisboa: Livrarias Aillaud e Bertrand, s/d. 653 p.

VERA, F. Breve História de la matemática. Buenos Aires: Editorial Losada, 1946. 176 p.